ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

NGUYỄN QUANG HUY

MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC VỚI DỮ LIỆU NGẪU NHIÊN

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ
Chuyên ngành: Toán Giải Tích

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2026

UBND THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC VỚI DỮ LIỆU NGẪU NHIÊN

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ

Chuyên ngành: Toán Giải Tích

Mã số : 9460102

Khóa: 20.1

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. PHẠM HOÀNG QUÂN

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2026

Mục lục

Lời cam đoan

Luận án được tôi hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Phạm Hoàng Quân. Tôi xin cam đoan rằng các kết quả được trình bày trong luận án là mới, trung thực và chưa từng được ai công bố trong công trình nào khác. Các bài báo có đồng tác giả đã được các đồng tác giả cho phép sử dụng để viết luận án này.

Lời cảm ơn

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến Thầy hướng dẫn khoa học của tôi PGS. TS. Phạm Hoàng Quân. Thầy đã tận tình hướng dẫn và động viên tôi trong suốt quá trình tôi làm luận án.

Đồng thời, tôi xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Lê Minh Triết cùng các thành viên trong nhóm nghiên cứu Toán Giải tích tại Trường Đại học Sài Gòn vì sự hỗ trợ, giúp đỡ nhiệt tình trong suốt quá trình tôi học và làm luận án.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc đến các đồng nghiệp trong Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Công nghệ kỹ thuật Tp. HCM vì sự quan tâm chỉa sẻ và tạo điều kiện thuận lợi để tôi tập trung hoàn thành luận án.

Ngoài ra, tôi cũng xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô trong hội đồng chấm luận án Tiến sĩ đã dành nhiều thời gian, công sức để đọc luận án và cho tôi những lời nhận xét quý báu để tôi hoàn thiện luận án.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi, những người đã luôn quan tâm, động viên, hỗ trợ tôi về mọi mặt, nhất là về mặt tinh thần để tôi học tập tốt.

Danh mục ký hiệu

x, y	: Biến không gian.
t	: Biến thời gian.
$L^2(0, \pi)$	: Không gian các hàm bình phương khả tích trên $(0, \pi)$.
$H^s(0, \pi)(s > 0)$	: Không gian thang Hilbert trên $(0, \pi)$.
u_t	: Đạo hàm riêng cấp một của u theo biến t.
u_{xx}	: Đạo hàm riêng cấp hai của u theo biến x.
u_{yy}	: Đạo hàm riêng cấp hai của u theo biến y.
$(-\Delta)^\alpha(\alpha \in (0, 1))$	: Toán tử Laplace bậc không nguyên.
$\mathbb{R}$	: Tập số thực.
$\mathbb{E}(X)$	: Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X.
$\\| \cdot \\|$	: Chuẩn trên không gian $L^2(0, \pi)$.

Danh mục bảng biểu, hình vẽ

MỞ ĐẦU

Bài toán ngược cho phương trình đạo hàm riêng là một dạng bài toán có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành khoa học và kỹ thuật như bài toán truyền nhiệt ngược, bài toán truyền sóng, bài toán tán xạ ngược, xử lý ảnh ngược... Những năm giữa thế kỷ XX, cùng với việc phát triển các công cụ tính toán hiện đại, các bài toán ngược đã được các nhà toán học trên thế giới xem xét mà tiêu biểu là các công trình của Tikhonov [48], Lions [31]. Từ đó cho đến nay, các bài toán ngược ngày càng được nhiều nhà toán học quan tâm do những ứng dụng xuất phát từ thực tiễn. Một đặc trưng thường gặp của các bài toán ngược là tính không chỉnh, đặc biệt là tính không ổn định của nghiệm. Theo Hadamard [28], chúng ta có định nghĩa bài toán chỉnh như sau:

Cho X và Y là các không gian định chuẩn, $K : X \to Y$ là một ánh xạ (có thể tuyến tính hoặc phi tuyến). Phương trình $Kx = y$ được gọi là chỉnh nếu ba điều kiện sau được thỏa:

1. *Tính tồn tại nghiệm*: Với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
2. *Tính duy nhất*: Với mọi $y \in Y$ thì tồn tại nhiều nhất một $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
3. *Tính ổn định nghiệm*: Nghiệm x của bài toán phải phụ thuộc liên tục vào y, nghĩa là với mọi dãy $(x_n) \subset X$ sao cho $Kx_n \to Kx$ khi $n \to \infty$ thì $x_n \to x$.

Một phương trình không thỏa ít nhất một trong ba tính chất trên gọi là không chỉnh.

Tính ổn định nghiệm của bài toán ngược là vấn đề mà các nhà toán học hiện nay rất quan tâm. Khi một bài toán không thỏa tính ổn định nghiệm, từ một sai số nhỏ trong dữ liệu đo đạc có thể dẫn đến sai số rất lớn của nghiệm tương ứng. Do đó, chúng ta cần xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định cho bài toán mà ta gọi là chỉnh hóa bài toán. Vì thế, việc khảo sát tính không chỉnh và thiết lập các phương pháp chỉnh hóa cho các bài toán ngược đã thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước.

Trong thời gian gần đây, các phương trình chứa đạo hàm bậc không nguyên đã trở nên phổ biến nhờ tính ứng dụng của chúng trong việc mô hình hóa các hiện tượng trong tự nhiên và kỹ thuật mà không thể được mô hình hóa bằng các phương trình có đạo hàm bậc nguyên như mô hình hóa hiện tượng khuếch tán dị thường và mô hình các hệ thống phức. Nhờ những ứng dụng rộng rãi của nó trong khoa học, kỹ thuật, tài chính, các bài toán ngược cho các phương trình đạo hàm riêng có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây.

Trong thực tế, chúng ta khó có được giá trị chính xác của dữ liệu bài toán vì sai số nảy sinh trong quá trình đo đạc. Tuy nhiên, do tác động của môi trường cũng như sai số trong quá trình thu thập dữ liệu dẫn đến dữ liệu của bài toán là một đại lượng ngẫu nhiên có độ lệch so với dữ liệu chính xác và độ lệch này là một nhiễu ngẫu nhiên. Mô hình nhiễu ngẫu nhiên gần với thực tế hơn và đã được sử dụng bởi nhiều nhà khoa học. Một quá trình ngẫu nhiên rất phổ biến là nhiễu trắng Gauss vì các ứng dụng đa dạng của nó trong các lĩnh vực khác nhau bao gồm khoa học, kỹ thuật và kinh tế như hệ thống điện tử, xử lý tín hiệu, mô hình kinh tế... Chính vì vậy, các bài toán ngược với dữ liệu nhiễu trắng Gauss đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Vì những phân tích trên, trong luận án chúng tôi khảo sát một số bài toán ngược có chứa đạo hàm bậc không nguyên cho phương trình đạo hàm riêng với dữ liệu ngẫu nhiên. Cụ thể, chúng tôi tập trung nghiên cứu hai dạng bài toán sau:

Bài toán 1: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Phương trình dạng parabolic dùng để mô tả các hiện tượng vật lý như quá trình truyền nhiệt, quá trình khuếch tán... Phương trình dạng parabolic thuần nhất có dạng

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0, \tag{1}$$

trong đó $u(x,t)$ là nhiệt độ hay nồng độ chất tan tại vị trí x và thời gian t, D là hệ số khuếch tán.

Phương trình parabolic bậc không nguyên được phát triển từ phương trình parabolic cổ điển, trong đó đạo hàm cổ điển được thay bằng đạo hàm bậc không nguyên. Phương trình dạng này được sử dụng để mô hình hóa cho các quá trình khuếch tán dị thường, trong đó sự lan truyền của các đại lượng như nhiệt, khối lượng hoặc động lượng không tuân theo các quy luật khuếch tán thông thường được mô tả bởi định luật Fick. Bài toán ngược cho phương trình dạng parabolic bậc không nguyên có nhiều ý nghĩa trong nhiều ngành khoa học, kỹ thuật, tài chính như xác định nhiệt độ ban đầu của một vật thể trong các vật liệu phức tạp và độ thấm khác nhau, xác định sự lan truyền của các chất trong các mô sinh học có hình dạng phức tạp và độ khuếch tán khác nhau, việc đo đạc di chuyển của các mạch nước ngầm, xác định và kiểm soát các nguồn ô nhiễm trong khoa học môi trường, xác định phân bố dân cư tại thời điểm ban đầu, phân tích sự lan truyền thông tin hoặc biến động giá trong các thị trường tài chính theo thời gian... (xem [10, 19, 27, 47])

Bài toán 2: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Phương trình Helmholtz là một phương trình đạo hàm riêng dạng elliptic cấp hai phổ biến trong vật lý và kỹ thuật, được đặt theo tên của nhà khoa học người Đức Hermann von Helmholtz. Phương trình Helmholtz thuần nhất trong miền ba chiều có dạng như sau

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

trong đó Δ là toán tử Laplace, $u(x, y, z)$ là hàm biên độ sóng tại điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, k là hệ số sóng.

Phương trình Helmholtz thường được sử dụng để mô tả các hiện tượng lan truyền sóng như sóng âm, sóng điện từ và các loại hiện tượng dao động khác. Các ứng dụng của nó bao phủ nhiều lĩnh vực như vật lý, quang học, cơ học, điện từ học và âm thanh học. Ngoài ra, phương trình Helmholtz đóng vai trò quan trọng trong các bài toán xử lý tín hiệu và xử lý hình ảnh.

Phương trình Helmholtz có chứa đạo hàm bậc không nguyên là dạng phát triển của phương trình Helmholtz cổ điển trong đó đạo hàm cổ điển được thay bằng đạo hàm bậc không nguyên. Phương trình Helmholtz bậc không nguyên được sử dụng để mô hình hóa sự truyền sóng trong môi trường không đồng nhất, các quá trình khuếch tán dị thường và các hiện tượng khác xảy ra do hiệu ứng phi cục bộ hoặc tính chất fractal của môi trường mà phương trình Helmholtz cổ điển mô tả không đầy đủ. Ngoài ra, nó còn có ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau trong vật lý, sinh học, y học.

Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã được quan tâm nghiên cứu trong các lĩnh vực khác nhau như âm học, địa vật lý, sinh hóa, điện từ... Chẳng hạn như việc xác định sự lan truyền âm thanh trong môi trường có cấu trúc phức tạp như vật liệu xốp hoặc mô sinh học, nghiên cứu sự truyền sóng điện từ trong môi trường không đồng nhất, phân tích tương tác sóng với bề mặt gồ ghề hoặc hình học fractal... (xem [11, 45, 64]).

Tổng quan tình hình nghiên cứu trong nước và thế giới

Bài toán 1: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Cho $D = (0, \pi)$, xét bài toán tìm phân bố nhiệt $u(x,t)$, $t \in [0, T)$ thỏa mãn phương trình khuếch tán sau

$$u_t(x,t) + a(t)(-\Delta)^{\alpha} u(x,t) = f(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in D \times (0,T), \quad (3)$$

với các điều kiện

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ t \in [0,T], \quad (4)$$

$$u(x,T) = g(x),\ x \in D, \quad (5)$$

trong đó $T > 0$ là thời điểm cuối, $a(t)$ là hệ số khuếch tán phụ thuộc thời gian, $g(x)$ là dữ liệu cuối, f là hàm nguồn nhiệt phi tuyến và $(-\Delta)^{\alpha}(\alpha \in (0,1))$ là toán tử Laplace bậc không nguyên. Trong trường hợp $a(t) = 1$ và $\alpha = 1$, bài toán (3) - (5) là bài toán nhiệt ngược thời gian cổ điển và đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học (xem [53, 54, 55, 56]). Trong [53], Đặng Đức Trọng và các đồng tác giả đã khảo sát bài toán trong trường hợp nguồn nhiệt phi tuyến

$$u_t - u_{xx} = f(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in (0,\pi) \times [0,T], \quad (6)$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ t \in [0,T], \quad (7)$$

$$u(x,T) = \phi(x),\ x \in (0,\pi). \quad (8)$$

Các tác giả đã kết hợp phương pháp tựa khả nghịch (QR) và phương pháp tựa giá trị biên (QBV) để chỉnh hóa bài toán (6) - (8) và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $\alpha = 1, a(t) \neq 1$, bài toán (3) - (5) đã được khảo sát bởi nhiều nhà nghiên cứu (xem [21, 22, 41, 42]). Trong [41], Phạm Hoàng

Quân cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán sau

$$u_t(x,t) - a(t)u_{xx}(x,t) = f(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in (0,\pi) \times [0,T], \tag{9}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\ ,\ t \in [0,T], \tag{10}$$

$$u(x,T) = g(x),\ x \in [0,\pi]. \tag{11}$$

Để chỉnh hóa bài toán (9)-(11), các tác giả đã sử dụng phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $a(t) = 1$ và $\alpha \neq 1$, bài toán (3) - (5) cũng đã được quan tâm nghiên cứu nhiều (xem [49, 66, 67, 68]). Trong [49], Lê Minh Triết và các đồng tác giả đã khảo sát bài toán trong trường hợp nguồn nhiệt không thuần nhất

$$u_t(x,t) + (-\Delta)^\alpha u(x,t) = f(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T], \tag{12}$$

$$u(x,T) = g(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0. \tag{14}$$

Các tác giả đã chỉnh hóa bài toán (12)- (14) bằng phương pháp chặt cụt Fourier và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $a(t) \neq 1$ và $\alpha \neq 1$, bài toán (3) - (5) đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [29, 32]). Trong [32], Trà Quốc Khanh và đồng tác giả đã sử dụng phương pháp Fourier để chỉnh hóa bài toán trong trường hợp không thuần nhất trên miền không bị chặn bằng phương pháp hàm lọc và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder. Trong [29], Trần Thị Khiếu và cộng sự đã sử dụng phương pháp Tikhonov để chỉnh hóa bài toán trên miền không bị chặn trong trường hợp phi tuyến

$$u_t(x,t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x,t) = f(x,t,u(x,t)),\ (x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,T], \tag{15}$$

$$u(x,T) = g(x),\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{16}$$

và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Từ dữ liệu đầu vào g được cung cấp tại thời điểm cuối $t = T$, mục tiêu của bài toán (3) - (5) là tìm phân bố nhiệt độ $u(x,t)$ tại các thời điểm trước đó $t \in [0,T)$. Tuy nhiên, trong thực tế, chúng ta khó có được dữ liệu chính xác mà chỉ có được dữ liệu nhiễu g_ε với sai số dữ liệu $\varepsilon > 0$. Trong các nghiên cứu trên, các tác giả đã khảo sát bài toán (3) - (5) trong trường hợp dữ liệu có nhiễu xác định.

Ngoài ra, trong [33], Erkan Nane và đồng tác giả đã chỉnh hóa bài toán

$$u_t(x,t) + a(t)(-\Delta)^\beta u(x,t) = F(u) + g(x,t),\ (x,t) \in (0,\pi) \times [0,T], \tag{17}$$

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \tag{18}$$

$$u(x,T) = u_T(x),\ x \in (0,\pi), \tag{19}$$

trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu ngẫu nhiên rời rạc. Các tác giả đã sử dụng một phương pháp tựa khả nghịch mới và thu được ước lượng sai số dạng Hölder.

Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện tại có rất ít nghiên cứu đối với bài toán (3)-(5) cho trường hợp dữ liệu nhiễu tuân theo mô hình nhiễu trắng Gauss. Vì vậy, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán trên trong trường hợp dữ liệu thỏa mãn mô hình

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\xi(x), \tag{20}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và ξ là một nhiễu trắng Gauss.

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\langle g_\varepsilon, \phi_n\rangle = \langle g, \phi_n\rangle + \varepsilon\langle \xi, \phi_n\rangle, \tag{21}$$

với $n = \overline{1,N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(0,\pi)$.

Mô hình nhiễu (20) là gần với thực tế hơn, mặc dù vậy, việc chỉnh hóa nghiệm của bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) sẽ khó khăn hơn vì nghiệm của bài toán chứa đại lượng có nhiễu ngẫu nhiên. Đặc biệt, việc chỉnh hóa bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) bằng phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier chưa được ai nghiên cứu vì tính khó trong việc lựa chọn các tham số chỉnh hóa. Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier, chúng tôi đã chỉnh hóa bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) và đưa ra đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác có dạng Hölder.

Bài toán 2: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm hàm biên độ sóng $u(x, y)$ thỏa mãn phương trình Helmholtz như sau

$$\Delta u(x,y) - (-\Delta)^{\alpha} u(x,y) + k^2 u(x,y) = f(x,y,u),\ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1), \tag{22}$$

với các điều kiện

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, y \in [0,1], \tag{23}$$

$$u(x,1) = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{24}$$

$$u_y(x,1) = h(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{25}$$

trong đó $(-\Delta)^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$ là toán tử Laplace bậc không nguyên, $k \in (0, \sqrt{2})$ là hệ số sóng cho trước, $f(x,y,u)$ là hàm nguồn phi tuyến. Các hàm số $g(x)$ và $h(x)$ là các dữ liệu tại $y = 1$.

Trong trường hợp $\alpha = 1$, bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz

$$\Delta u(x,y) + k^2 u(x,y) = f(x,y,u),\ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1), \tag{26}$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0\ ,\ y \in (0,1), \tag{27}$$

$$u_y(x,0) = f(x),\ x \in (0,\pi), \tag{28}$$

$$u(x,0) = g(x),\ x \in (0,\pi), \tag{29}$$

đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học (xem [23, 38, 39, 59, 65]). Trong [59], Phạm Hoàng Quân và các đồng tác giả đã sử dụng phương pháp tựa khả nghịch có điều chỉnh để chỉnh hóa bài toán (26) - (29) trong trường hợp thuần nhất $f = 0$ và thu được tốc độ hội tụ dạng logarit. Trong [65], nhóm tác giả Trần Quốc Việt đã chỉnh hóa bài toán (26)- (29) trong trường hợp không thuần nhất $f \neq 0$ trên miền ba chiều bằng cách áp dụng phương pháp hàm lọc tổng quát và thu được tốc độ hội tụ dạng logarit.

Trong trường hợp $k = 0$, bài toán Cauchy cho phương trình Laplace

$$\Delta u(x,y) = f(x,y,u), (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1), \tag{30}$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0\,,\ y \in (0,1), \tag{31}$$

$$u(x,0) = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{32}$$

$$u_y(x,0) = h(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{33}$$

đã được khảo sát bởi nhiều nhóm nghiên cứu (xem [25, 36, 37]). Trong [36], nhóm tác giả Chu Li Fu đã sử dụng phương pháp chặt cụt để chỉnh hóa bài toán (30) - (33) trong trường hợp thuần nhất và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder. Trong [25], nhóm tác giả Z. Hongwu đã chỉnh hóa bài toán (30) - (33) trong trường hợp phi tuyến bằng phương pháp tựa giá trị biên cải tiến và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong [24], Phan Trung Hiếu cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz có điều chỉnh trong trường hợp hàm nguồn không thuần nhất như sau

$$\Delta u(x,y) - k^2 u(x,y) = f(x,y),\ x \in \mathbb{R}, y \in (0,1), \tag{34}$$

$$u_y(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{35}$$

$$u(x,0) = \psi(x),\ x \in \mathbb{R}. \tag{36}$$

Sử dụng phương pháp chặt cụt, các tác giả đã chỉnh hóa bài toán (34) - (36) và thu được ước lượng sai số có dạng Hölder.

Trong các nghiên cứu kể trên, các tác giả đã nghiên cứu bài toán (22) - (25) trong trường hợp dữ liệu bị nhiễu xác định.

Trong [40], Phạm Hoàng Quân cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán

$$u_{yy}(x,y) - (-\Delta)^{\alpha} u(x,y) - k^2 u(x,y) = S(u) + h(x,y), \tag{37}$$

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, y \in [0,1], \tag{38}$$

$$u(x,1) = f(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{39}$$

$$u_y(x,1) = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{40}$$

trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu ngẫu nhiên rời rạc. Trong đó, các tác giả đã sử dụng phương pháp hồi quy chuỗi lượng giác kết hợp phương pháp chặt cụt chuỗi để chỉnh hóa bài toán (37) - (40) và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Theo hiểu biết của chúng tôi, cho tới thời điểm hiện tại, bài toán (21) - (24) với dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu trắng Gauss

$$\begin{aligned} g_{\varepsilon}(x) &= g(x) + \varepsilon \xi(x), \\ h_{\varepsilon}(x) &= h(x) + \varepsilon \xi(x), \end{aligned} \tag{41}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và ξ là một nhiễu trắng Gauss chưa được quan tâm nghiên cứu.

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\begin{aligned} \langle g_{\varepsilon}, \phi_n \rangle &= \langle g, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \\ \langle h_{\varepsilon}, \phi_n \rangle &= \langle h, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \end{aligned} \tag{42}$$

với $n = \overline{1, N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(0,\pi)$.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán (21) - (24) thỏa mô hình nhiễu (41). Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier, chúng tôi thiết lập nghiệm chỉnh hóa cho bài toán và đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chính xác.

Phần chính của luận án được cấu trúc như sau.

Mở đầu

Chương 1: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian. Trong chương một, chúng tôi xây dựng công thức biểu diễn nghiệm của bài toán, đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán, xây dựng nghiệm chỉnh hóa, đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác, trình bày ví dụ số minh họa.

Chương 2: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian. Trong chương hai, chúng tôi xây dựng công thức biểu diễn nghiệm của bài toán, đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán, xây dựng nghiệm chỉnh hóa, đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác, trình bày ví dụ số minh họa.

Kết luận

Tài liệu tham khảo

Chương 1

BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN

1.1 Giới thiệu bài toán

Trong chương một, chúng tôi khảo sát bài toán tìm phân bố nhiệt $u(x,t)$ thỏa mãn phương trình khuếch tán phi tuyến sau

$$u_t(x,t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x,t) = f(x,t,u(x,t)), \ (x,t) \in D \times (0,T), \quad (1.1)$$

với các điều kiện

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \ t \in [0,T], \quad (1.2)$$

$$u(x,T) = g(x), \ x \in D, \quad (1.3)$$

trong đó $D = (0,\pi)$, $T > 0$ là thời điểm cuối, $a(t)$ là hệ số khuếch tán phụ thuộc thời gian, $g(x)$ là dữ liệu cuối, $f(x,t,u)$ là nguồn nhiệt phi tuyến và $(-\Delta)^\alpha (\alpha \in (0,1))$ là toán tử Laplace bậc không nguyên.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán trên trong trường hợp dữ liệu thỏa mãn mô hình

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon \xi(x), \tag{1.4}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ là cường độ nhiễu và ξ là một nhiễu trắng Gauss.

Nội dung chủ yếu của chương hai gồm ba phần. Trong tiểu mục 1.2, chúng tôi sẽ thiết lập dạng nghiệm của bài toán (1.1)-(1.3) và đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán. Trong tiểu mục 1.3, chúng tôi chỉnh hóa bài toán bằng phương pháp Fourier và đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác. Trong tiểu mục 1.4, chúng tôi đưa ra một ví dụ số để minh họa cho phần lý thuyết.

Kết quả của chương hai đã được công bố trong bài báo

[A1] Pham Hoang Quan, Nguyen Quang Huy, Le Minh Triet, Luu Hong Phong, *The backward problem for the nonlinear space-fractional diffusion equation with Gaussian white noise*, Kyungpook Mathematical Journal 2025; 65(4); 639-667.

1.2 Dạng nghiệm của bài toán (1.1)-(1.3)

Từ đây trở đi , ta ký hiệu $\|\cdot\|$ thay cho chuẩn $\|\cdot\|_{L^2(D)}$.

Trong chương hai, ta cần một số giả thiết sau

(H1): $a(t)$ là hàm liên tục sao cho $0 < p \le a(t) \le q, \forall t \in [0,T]$.

(H2): Hàm số $g(x)$ thuộc $L^2(D)$.

(H3): Hàm nguồn $f : [0,\pi] \times [0,T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x,t,u) - f(x,t,v)| \le K|u - v|,$$

với $K > 0$ độc lập với x, t, u, v.

Định lý 1.1. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa. Nếu bài toán (1.1) - (1.3) có nghiệm trong $C([0,T]; L^2(D))$ thì nghiệm của bài toán* *được cho bởi*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right] \sin(nx), \tag{1.5}$$

trong đó

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

$$f_n(u)(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, s, u(x,s)) \sin(nx) dx,$$

$$F(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Trong tiểu mục 1.3, chúng tôi sẽ trình bày một phương pháp chỉnh hóa cho bài toán.

1.3 Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (1.1)-(1.3)

Để bổ trợ cho việc chứng minh các kết quả chính, chúng tôi sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 1.2. *Cho* $\varepsilon \in (0,1)$, $s > 0$ *và* $g \in H^s(D)$. *Cho* $g_{N(\varepsilon)} \in L^2(D)$ *như sau*

$$g_{N(\varepsilon)}(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E} \left\| g_{N(\varepsilon)} - g \right\|^2 \leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|^2_{H^s(D)}. \tag{1.6}$$

Ở đây N *phụ thuộc* ε *và thỏa mãn* $\lim_{\varepsilon \to 0} N(\varepsilon) = +\infty$.

Chúng ta thấy rằng $e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}$ và $e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}$ khi n đủ lớn là nguyên nhân gây ra tính không ổn định nghiệm của bài toán ban đầu. Vì thế, để xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định của bài toán, chúng tôi sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier để đưa ra nghiệm chỉnh hóa như sau

$$\begin{aligned} u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}(x,t) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \Big[& e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}(g_{N(\varepsilon)})_n \\ & - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)})(s)ds \Big] \sin(nx), \end{aligned} \tag{1.7}$$

trong đó $B_{N(\varepsilon)}$ là số nguyên dương thỏa mãn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_{N(\varepsilon)} = +\infty$.

Định lý 1.3. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Cho $\varepsilon \in (0,1)$, $s > 0$, $T > 0$ và $g \in H^s(D)$. Cho $N(\varepsilon), g_{N(\varepsilon)}$ như trong Bổ đề 1.2. Khi đó, phương trình tích phân (1.7) có nghiệm duy nhất $u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)} \in V_T$.*

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác dưới các điều kiện khác nhau.

Định lý 1.4. *Giả sử rằng các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \le M_1$. Gọi u là nghiệm chính xác của bài toán (1.1) - (1.3) và $u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}$ là nghiệm chỉnh hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử tồn tại $P_1 > 0$ sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)|^2 e^{2n^{2\alpha}F(t)} \le P_1, \ \ \forall t \in [0,T]. \tag{1.8}$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E}\left\| u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}(.,t) - u(.,t) \right\|^2 \le {P_2}^2 e^{2K^2T(T-t)} \varepsilon^{\frac{4spt}{(2s+1)(p+q)T}}, t \in [0,T], \tag{1.9}$$

trong đó $P_2 = 4(1 + M_1^2 + 5\pi P_1)$.

Định lý 1.5. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \le M_1$. Gọi u là nghiệm chính* *xác của bài toán (1.1) - (1.3) và $u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}$ là nghiệm chỉnh hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử rằng tồn tại $Q_1 > 0$ sao cho*

$$\|u(.,t)\|_{H^{2\alpha}(D)} \leq Q_1,\ \forall t \in [0,T].$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E}\left\|u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}(.,t) - u(.,t)\right\|^2 \leq M_2 e^{2K^2T(T-t)}\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-2}, t \in [0,T], \quad (1.10)$$

trong đó $M_2 = 4\left(1 + M_1^2 + Q_1^2\left(\frac{2s}{(2s+1)(p+q)T}\right)^{-2}\right)$.

Định lý 1.6. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \leq M_1$. Gọi u là nghiệm chính xác của bài toán (1.1) - (1.3) và $u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}$ là nghiệm chỉnh hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử rằng tồn tại $r > 0$ và $Q_2 > 0$ sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn^{2\alpha}}|u_n(t)|^2 \leq Q_2,\ \forall t \in [0,T].$$

Khi đó, ta có đánh giá

$$\mathbb{E}\left\|u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}(.,t) - u(.,t)\right\|^2 \leq M_3 e^{2K^2T(T-t)}\left(\varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} + \varepsilon^{\frac{4rs}{(2s+1)T(p+q)}}\right), t \in [0,T], \quad (1.11)$$

trong đó $M_3 = \max\{4(1+M_1^2), 4Q_2\}$.

1.4 Ví dụ minh họa

Chúng tôi xét bài toán tìm $u(x,t)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u_t(x,t) + a(t)(-\Delta)^{\alpha}u(x,t) = f(x,t,u), & (x,t) \in (0,\pi)\times[0,1], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,,\ t \in [0,1], \\ u(x,1) = g(x),\ x \in (0,\pi), \end{cases} \quad (1.12)$$

trong đó $\alpha = 0.6, a(t) = \dfrac{1}{10}(t+0.2)$ và

$$\begin{aligned}
f(x,t,u(x,t)) &= (4\alpha t^{4\alpha-1} + \frac{t}{10})e^{t^{4\alpha}}\sin(x) + \frac{2}{100}u(x,t),\\
g(x) &= e\sin(x),\\
F(t) &= \int\limits_0^t a(s)ds = \frac{1}{10}(0.5t^2 + 0.2t).
\end{aligned}$$

Nghiệm chính xác của bài toán (1.12) là

$$u_{exact}(x,t) = e^{t^{4\alpha}}\sin(x).$$

Ta chọn các tham số chỉnh hóa

$$N = [N(\varepsilon)] = [\varepsilon^{\frac{-2}{3}}] \text{ và } B_N = [B_{N(\varepsilon)}] = \left[\ln\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)\right].$$

Xét dữ liệu nhiễu

$$g_N(x) = e\sin(x) + \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\langle\xi,\phi_n\rangle\phi_n(x),$$

trong đó $\phi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin(nx)$ và $\langle\xi,\phi_n\rangle$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối Gauss với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1.

Trong phần mềm MATLAB, để khởi tạo bộ số ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, ta sử dụng hàm $randn(.)$.

Từ (1.7), ta có nghiệm chỉnh hóa thỏa

$$u_N^\varepsilon(x,t) = \sum_{n=1}^{B_N}\left[e^{n^{2\alpha}(F(1)-F(t))}(g_N)_n - \int_t^1 e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}f_n(u_N^\varepsilon)(s)ds\right]\sin(nx),$$

trong đó

$$\begin{aligned}
(g_N)_n &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi (g_N)(x)\sin(nx)dx,\\
f_n(u_N^\varepsilon)(s) &= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f(x,s,u_N^\varepsilon)(s)\sin(nx)dx.
\end{aligned}$$

Bây giờ, ta chia nhỏ đoạn [0,1] thành 10 đoạn con bởi 11 điểm

$$t_j = \frac{j-1}{10}, j = 1, 2, ...11.$$

Đặt lần lượt $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$.

Cho các giá trị khác nhau của ε, chúng tôi tính toán kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm t_j, ký hiệu bởi $\mathbb{E}\left\|u_N^\varepsilon(.,t_j) - u_{exact}(.,t_j)\right\|^2$. Để làm được việc này, chúng tôi lập một mẫu thống kê với kích cỡ mẫu là $M = 100$. Cụ thể, ở lần mô phỏng thứ k ($k = 1, 2, ...100$), ký hiệu $u_{N,k}^\varepsilon(.,t_j)$ là nghiệm xấp xỉ của $u_{exact}(.,t_j)$. Với mỗi giá trị của ε, để tính toán $u_{N,k}^\varepsilon(.,t_j)$, chúng tôi sử dụng phép lặp Picard như sau

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,0}(x,t_j) & = 0, \\ u_{\varepsilon,q}(x,t_j) & = \sum\limits_{n=1}^{B_N} \Big[e^{n^{2\alpha}(F(1)-F(t_j))}(g_N)_n \\ & \quad - \int\limits_{t_j}^{1} e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t_j))} f_n(u_{\varepsilon,q-1}(x,t_j))(s)ds \Big] \sin(nx), \end{cases}$$

với $q = 1, 2, 3, ...$

Phép lặp được thực hiện và dừng lại tại q_0 khi

$$\left\|u_{\varepsilon,q_0}(.,t_j) - u_{\varepsilon,q_0-1}(.,t_j)\right\|^2 \leq 10^{-5}.$$

Bây giờ, ta chọn u_{ε,q_0} để xấp xỉ $u_{N,k}^\varepsilon$ và tính kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm $t_j, j = 1, 2, ...11$

$$\mathbb{E}\left\|u_N^\varepsilon(.,t_j) - u_{exact}(.,t_j)\right\|^2 \approx \frac{1}{M}\left(\sum_{k=1}^{M}\left\|u_{N,k}^\varepsilon(.,t_j) - u_{exact}(.,t_j)\right\|^2\right)$$

Kết quả tính toán của chúng tôi được mô tả trong Bảng 1.1 dưới đây.

	$\mathbb{E}\left\Vert u_N^{\varepsilon}(.,t) - u_{exact}(.,t)\right\Vert^2$		
t, ε	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$t = 0$	$3.3278e-02$	$5.1536e-03$	$4.4474e-03$
$t = 0.1$	$3.2502e-02$	$4.2647e-03$	$3.5942e-03$
$t = 0.2$	$3.1817e-02$	$3.5336e-03$	$2.8968e-03$
$t = 0.3$	$3.1175e-02$	$2.9109e-03$	$2.3071e-03$
$t = 0.4$	$3.0561e-02$	$2.3769e-03$	$1.8058e-03$
$t = 0.5$	$2.9961e-02$	$1.9170e-03$	$1.3784e-03$
$t = 0.6$	$2.9365e-02$	$1.5162e-03$	$1.0108e-03$
$t = 0.7$	$2.8765e-02$	$1.1585e-03$	$6.8795e-04$
$t = 0.8$	$2.8154e-02$	$8.2836e-04$	$3.9687e-04$
$t = 0.9$	$2.7555e-02$	$5.2521e-04$	$1.4165e-04$
$t = 1$	$2.7077e-02$	$3.2072e-04$	$2.8998e-06$

Bảng 1.1. Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^{\varepsilon}(.,t)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(.,t)$ tại các thời điểm khác nhau tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ và $M = 100$.

Chương 2

BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH HELMHOLTZ PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN

2.1 Giới thiệu bài toán

Trong chương hai, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm hàm biên độ sóng $u(x,y)$ thỏa mãn phương trình Helmholtz phi tuyến sau

$$\Delta u(x,y) - (-\Delta)^{\alpha} u(x,y) + k^2 u(x,y) = f(x,y,u),\ (x,y) \in (0,\pi) \times (0,1) \tag{2.1}$$

với các điều kiện

$$u(0,y) = u(\pi,y) = 0, y \in [0,1], \tag{2.2}$$

$$u(x,1) = g(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{2.3}$$

$$u_y(x,1) = h(x), \quad x \in (0,\pi), \tag{2.4}$$

trong đó $(-\Delta)^{\alpha}, \alpha \in (0,1)$ là toán tử Laplace bậc không nguyên , $k \in (0,\sqrt{2})$ là hệ số sóng cho trước, $f(x,y,u)$ là hàm nguồn phi tuyến. Các hàm số $g(x)$ và $h(x)$ là các dữ liệu tại $y = 1$.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán (2.1) - (2.4) trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu trắng Gauss

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= g(x) + \varepsilon\xi(x), \\ h_\varepsilon(x) &= h(x) + \varepsilon\xi(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

Nội dung chủ yếu của chương ba gồm ba phần. Trong tiểu mục 2.2, chúng tôi sẽ tìm dạng nghiệm của bài toán và đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán. Trong tiểu mục 2.3, chúng tôi chỉnh hóa bài toán bằng phương pháp chặt cụt Fourier và đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác trên các không gian hàm khác nhau. Trong tiểu mục 2.4, chúng tôi đưa ra một ví dụ minh họa cho phần lý thuyết.

Kết quả của chương 2 đã được công bố trong bài báo

[A2] Huy Nguyen Quang, Phong Luu Hong, Quan Pham Hoang, Triet Le Minh, *A backward problem for the nonlinear fractional Helmholtz equation with Gaussian white noise on the measurement*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 37(2025), pages 361-376.

2.2 Dạng nghiệm của bài toán (2.1) - (2.4)

Trong chương này, chúng tôi sử dụng một số giả thiết sau

(H4): Các hàm số g và h thuộc $L^2(0,\pi)$.

(H5): Hàm nguồn $f : [0,\pi] \times [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x,y,u) - f(x,y,v)| \le K|u-v|,$$

với $K > 0$ độc lập với x, y, u, v .

Trong định lý 2.1 sau, chúng tôi tìm dạng nghiệm của bài toán (2.1) - (2.4)

Định lý 2.1. *Giả sử các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Nếu bài toán (2.1) - (2.4) có nghiệm trong* $C([0,1];L^2(0,\pi))$ *thì nghiệm của bài toán được cho bởi*

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[g_n\cosh((1-y)m_n)-h_n\frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} \\ +\int_y^1\frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n}f_n(u)(s)ds\Big]\phi_n(x), \tag{2.6}$$

trong đó

$$\phi_n\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx),\ m_n=\sqrt{n^2+n^{2\alpha}-k^2}, \\ g_n=\left\langle g,\phi_n\right\rangle,\ h_n=\left\langle h,\phi_n\right\rangle,\ f_n(u)(s)=\left\langle f(.,s,u(.,s)),\phi_n\right\rangle.$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một ví dụ để minh họa cho tính không chỉnh của bài toán (2.1) - (2.4) với dữ liệu thỏa mãn mô hình nhiễu trắng Gauss (2.5).

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày một phương pháp chỉnh hóa cho bài toán.

2.3 Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (2.1)-(2.4)

Để hỗ trợ cho việc chứng minh các định lý chính, chúng tôi cần sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 2.2. (**Xem [50]**) Cho $z\in[0,1], x>0$, ta có các bất đẳng thức sau

i) $\cosh(zx)\le e^{zx}$,

ii) $\dfrac{\sinh(zx)}{x}\le e^{zx}$.

Bổ đề 2.3. *Cho* $\varepsilon \in (0,1)$, $s > 0$ *và* $g, h \in H^s(0,\pi)$. *Cho* $g_{N(\varepsilon)}, h_{N(\varepsilon)} \in L^2(0,\pi)$ *như dưới đây*

$$g_{N(\varepsilon)}(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$
$$h_{N(\varepsilon)}(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle h_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\|g_{N(\varepsilon)} - g\right\|^2 &\le \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|^2_{H^s(0,\pi)}, \\ \mathbb{E}\left\|h_{N(\varepsilon)} - h\right\|^2 &\le \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|h\|^2_{H^s(0,\pi)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ở đây N *phụ thuộc* ε *và thỏa mãn* $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} N(\varepsilon) = +\infty$.

Ta thấy rằng các số hạng $\cosh((1-y)m_n)$ và $\dfrac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}$ tăng rất nhanh khi n đủ lớn. Do đó chúng là nguyên nhân gây ra tính không ổn định nghiệm của bài toán ban đầu. Vì thế, để xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định của bài toán, chúng tôi sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier như dưới đây

$$\begin{aligned} u^\varepsilon_{N(\varepsilon)}(x,y) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \Big[&\cosh((1-y)m_n)(g_{N(\varepsilon)})_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}(h_{N(\varepsilon)})_n \\ &+ \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u^\varepsilon_{N(\varepsilon)})(s)ds \Big] \phi_n(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

trong đó $B_{N(\varepsilon)}$ là một số nguyên dương thỏa mãn $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} B_{N(\varepsilon)} = +\infty$.

Định lý 2.4. *Giả sử rằng các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Cho* $N(\varepsilon)$, $g_{N(\varepsilon)}$, $h_{N(\varepsilon)}$ *như trong Bổ đề 2.3. Khi đó phương trình tích phân (2.8) có nghiệm duy nhất* $u^\varepsilon_{N(\varepsilon)} \in V$.

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác dưới các điều kiện khác nhau.

Định lý 2.5. *Giả sử rằng các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa mãn. Cho* $N(\varepsilon), g_{N(\varepsilon)}, h_{N(\varepsilon)}$ *như trong Bổ đề 2.3. Giả sử tồn tại* $s > 0, M_1 > 0$ *sao cho* $\|g\|_{H^s(0,\pi)} \le M_1$ *và* $\|h\|_{H^s(0,\pi)} \le M_1$. *Giả sử* u *là nghiệm chính xác của bài toán (2.1) - (2.4) và* $u^\varepsilon_{N(\varepsilon)}$ *là nghiệm chỉnh hóa tương ứng với các dữ liệu nhiễu* $g_{N(\varepsilon)}$ *và* $h_{N(\varepsilon)}$.

i) Nếu với mọi $q > 0$, *tồn tại* $Q_1 > 0$ *sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} e^{2yn} |u_n(y)|^2 \le Q_1, \quad \forall y \in [0,1], \tag{2.9}$$

thì ta có

$$\mathbb{E}\left\|u^\varepsilon_{N(\varepsilon)}(.,y) - u(.,y)\right\|^2 \le 4M_2 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^{-2q} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sy}{2s+1}}\right), \tag{2.10}$$

trong đó $M_2 = \max\left\{3(1+M_1^2), Q_1 2^q \left(\frac{2s+1}{s}\right)^{2q}\right\}$.

ii) Nếu với mọi $r > 0$, *tồn tại* $Q_2 > 0$ *sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn} |u_n(y)|^2 \le Q_2, \quad \forall y \in [0,1], \tag{2.11}$$

thì ta có

$$\mathbb{E}\left\|u^\varepsilon_{N(\varepsilon)}(.,y) - u(.,y)\right\|^2 \le 4M_3 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}}\right), \tag{2.12}$$

trong đó $M_3 = \max\{3(1+M_1^2), Q_2\}$.

Định lý 2.6. *Giả sử các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Cho* $N(\varepsilon)$, $g_{N(\varepsilon)}$, $h_{N(\varepsilon)}$ *như trong Bổ đề 2.3. Giả sử rằng tồn tại* $s > 0, M_1 > 0$ *sao cho* $\|g\|_{H^s(0,\pi)} \le M_1$ *và* $\|h\|_{H^s(0,\pi)} \le M_1$. *Giả sử* u *là nghiệm chính xác của bài* *toán (2.1) - (2.4) và* $u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}$ *là nghiệm chỉnh hóa tương ứng với các dữ liệu nhiễu* $g_{N(\varepsilon)}$ *và* $h_{N(\varepsilon)}$*. Nếu điều kiện (2.11) được thỏa thì với mọi* $y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left\|u^{\varepsilon}_{N(\varepsilon)}(.,y) - u(.,y)\right\|^2_{H^q(0,\pi)} \\ &\le M_4\left(\left(\frac{s}{2s+1}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^2 + k^2\right)^q \left[e^{3K^2(1-y)}\left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}}\right) + 4\varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}}\right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

trong đó $M_4 = \dfrac{1}{2^{q-1}}\max\left\{12(1+M_1^2), 4Q_2\right\}$.

2.4 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán tìm hàm số $u(x,y)$ thỏa mãn bài toán

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) - (-\Delta)^{\alpha}u(x,y) + 1.95u(x,y) = f(x,y,u), & (x,y) \in (0,\pi)\times[0,1], \\ u(0,y) = u(\pi,y) = 0, \quad y \in [0,1], \\ u(x,1) = g(x), \quad x \in (0,\pi), \\ u_y(x,1) = h(x), \quad x \in (0,\pi), \end{cases} \tag{2.14}$$

trong đó $\alpha = \dfrac{1}{31}$ và

$$\begin{aligned} f(x,y,u) &= \frac{(-64^2\alpha^2 y^{2(64\alpha-1)} - 0.05)\cos(y^{64\alpha})\sin(x)}{3} \\ &\quad - \frac{64\alpha(64\alpha-1)y^{64\alpha-2}\sin(y^{64\alpha})\sin(x)}{3} + u(x,y), \\ g(x) &= \frac{1}{3}\cos(1)\sin(x), \\ h(x) &= -\frac{64}{3}\alpha\sin(1)\sin(x). \end{aligned}$$

Nghiệm chính xác của bài toán (2.14) là

$$u_{exact}(x,y) = \frac{1}{3}\cos(y^{64\alpha})\sin(x).$$

Ta chọn các tham số chỉnh hóa là

$$N = [N(\varepsilon)] = [\varepsilon^{-\frac{2}{3}}],\, B_N = [B_{N(\varepsilon)}] = \left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^2 + 1.95\right)}\right].$$

Xét dữ liệu nhiễu

$$g_N(x) = \frac{1}{3}\cos(1)\sin(x) + \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\langle \xi, \phi_n\rangle \phi_n(x),$$
$$h_N(x) = -\frac{64}{3}\alpha\sin(1)\sin(x) + \varepsilon\sum_{n=1}^{N}\langle \xi, \phi_n\rangle \phi_n(x),$$

trong đó $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)$ và $\langle \xi, \phi_n\rangle$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối Gauss với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1.

Trong phần mềm MATLAB, để khởi tạo bộ số ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, ta sử dụng hàm $randn(.)$.

Từ (2.8), ta có nghiệm chỉnh hóa thỏa mãn

$$u_N^\varepsilon(x,y) = \sum_{n=1}^{B_N}\Big[\cosh((1-y)m_n)(g_N)_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}(h_N)_n + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u_N^\varepsilon)(s)ds\Big]\phi_n(x),$$

trong đó

$$m_n = \sqrt{n^2 + n^{2\alpha} - 1.95},$$
$$(g_N)_n = \langle g_N, \phi_n\rangle,$$
$$(h_N)_n = \langle h_N, \phi_n\rangle,$$
$$f_n(u_N^\varepsilon)(s) = \langle f(., s, u_N^\varepsilon(., s)), \phi_n\rangle.$$

Bây giờ, ta chia nhỏ đoạn [0,1] thành 10 đoạn con bởi 11 điểm

$$y_j = \frac{j-1}{10}, j = 1, 2, ...11.$$

Đặt lần lượt $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$.

Cho các giá trị khác nhau của ε, chúng tôi tính toán kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm y_j, ký hiệu bởi $\mathbb{E}\left\|u_N^\varepsilon(.,y_j) - u_{exact}(.,y_j)\right\|^2$. Để làm được việc này, chúng tôi lập một mẫu thống kê với kích cỡ mẫu là $M = 100$. Cụ thể, ở lần mô phỏng thứ k $(k = 1, 2, ...100)$, ký hiệu $u_{N,k}^\varepsilon(.,y_j)$ là nghiệm xấp xỉ của $u_{exact}(.,y_j)$. Với mỗi giá trị của ε, để tính toán $u_{N,k}^\varepsilon(.,y_j)$, chúng tôi sử dụng phép lặp Picard thỏa mãn

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,0}(x,y_j) &= 0, \\ u_{\varepsilon,q}(x,y_j) &= \sum\limits_{n=1}^{B_N}\Big[\cosh((1-y_j)m_n)(g_N)_n - \dfrac{\sinh((1-y_j)m_n)}{m_n}(h_N)_n \\ & \quad - \int\limits_{y_j}^{1}\dfrac{\sinh((s-y_j)m_n)}{m_n} f_n(u_{\varepsilon,q-1}(x,y_j))(s)ds\Big]\phi_n(x), \end{cases}$$

với $q = 1, 2, 3, ...$

Phép lặp được thực hiện và dừng lại tại q_0 khi

$$\left\|u_{\varepsilon,q_0}(.,y_j) - u_{\varepsilon,q_0-1}(.,y_j)\right\|^2 \le 10^{-5}.$$

Bây giờ, ta chọn u_{ε,q_0} để xấp xỉ $u_{N,k}^\varepsilon$ và tính kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm $y_j, j = 1, 2, ...11$

$$\mathbb{E}\left\|u_N^\varepsilon(.,y_j) - u_{exact}(.,y_j)\right\|^2 \approx \frac{1}{M}\left(\sum_{k=1}^{M}\left\|u_{N,k}^\varepsilon(.,y_j) - u_{exact}(.,y_j)\right\|^2\right).$$

Kết quả tính toán của chúng tôi được mô tả trong Bảng 2.1 dưới đây.

	$\mathbb{E}\left\|u_N^{\varepsilon}(.,y)-u_{exact}(.,y)\right\|^2$		
y,ε	$\varepsilon=0.1$	$\varepsilon=0.01$	$\varepsilon=0.001$
$y=0$	$3.5015e-01$	$3.4985e-01$	$3.4981e-01$
$y=0.1$	$3.0594e-01$	$3.0375e-01$	$3.0350e-01$
$y=0.2$	$2.5604e-01$	$2.5175e-01$	$2.5131e-01$
$y=0.3$	$1.9912e-01$	$1.9264e-01$	$1.9203e-01$
$y=0.4$	$1.4316e-01$	$1.3447e-01$	$1.3375e-01$
$y=0.5$	$9.2952e-02$	$8.2124e-02$	$8.1378e-02$
$y=0.6$	$5.4837e-02$	$4.1924e-02$	$4.1231e-02$
$y=0.7$	$3.1304e-02$	$1.6261e-02$	$1.5696e-02$
$y=0.8$	$2.1468e-02$	$4.0042e-03$	$3.6017e-03$
$y=0.9$	$2.1099e-02$	$5.1801e-04$	$2.5170e-04$

Bảng 2.1. Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^{\varepsilon}(.,y)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(.,y)$ tương ứng với $\varepsilon=0.1,0.01,0.001$ và $M=100$.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Trong chương 1, chúng tôi đã khảo sát chỉnh hóa cho bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến với dữ liệu nhiễu trắng Gauss. Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier, chúng tôi đã thực hiện việc đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chính xác. Đánh giá sai số có tốc độ hội tụ dạng logarit hoặc dạng Hölder. Hơn nữa, chúng tôi còn đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết.

Trong chương 2, chúng tôi đã khảo sát chỉnh hóa cho bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến với dữ liệu nhiễu trắng Gauss. Với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chỉnh xác, chúng tôi đã đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier. Đánh giá sai số có tốc độ hội tụ dạng logarit hoặc dạng Hölder. Hơn nữa, chúng tôi còn đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết.

Kết quả của luận án đã được công bố trong hai bài báo thuộc tạp chí Wos/Scopus.

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ khảo sát các bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến và phương trình Helmholtz phi tuyến trong trường hợp hệ số phi tuyến và trong trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz địa phương.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ

[A1] Pham Hoang Quan, Nguyen Quang Huy, Le Minh Triet, Luu Hong Phong, *The backward problem for the nonlinear space-fractional diffusion equation with Gaussian white noise*, Kyungpook Mathematical Journal 2025; 65(4); pages 639-667.

[A2] Huy Nguyen Quang, Phong Luu Hong, Quan Pham Hoang, Triet Le Minh, *A backward problem for the nonlinear fractional Helmholtz equation with Gaussian white noise on the measurement*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 37(2025), pages 361-376.

Tài liệu tham khảo

[1] Đặng Đình Áng, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Nguyễn Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân;*Biến đổi tích phân*, Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam, 2007.

[2] Dương Minh Đức;*Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2011.

[3] Võ Hoàng Hưng; *Giải tích thực*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2019.

[4] Nguyễn Đình Phư, *Phương trình vi phân*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TPHCM, 2002.

[5] Mai Đức Thành, *Phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TPHCM, 2016.

[6] Đặng Đức Trọng; *Bài giảng Giải tích thực*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM, 2015.

[7] Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, Đặng Hoàng Tâm, Đinh Ngọc Thanh; *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2011.

[8] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đăng Minh; *Lý thuyết xác suất*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2024.

[9] G. Acosta and J. P. Borthagaray; *A fractional Laplace Equation: Regularity of Solutions and Finite Element Approximations,* SIAM Journal on Numerical Analysis. 55, 2017, 472-495.

[10] N. V. S. Avula, M. L. Klein, and S. Balasubramanian; *Understanding the Anomalous Diffusion of Water in Aqueous Electrolytes Using Machine Learned Potentials*, The Journal of Physical Chemistry Letters, 14, 2023, 9500-9507.

[11] D. Baleanu, H. K. Jassim, and M. A. Qurashi; *Solving Helmholtz equation with local fractional derivative operators*, Fractal and Fractional 3(3), 2019, 12pp.

[12] S. Biagi, E. Vecchi, S. Dipierro, and E. Valdinoci; *Semilinear elliptic equations involving mixed local and nonlocal operators*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2020, 1-31.

[13] D. Cassani, L. Vilasi, and Y. J. Wang; *Local versus nonlocal elliptic equations: short - long range field interactions*, Advances in Nonlinear Analysis 10(1), 2021, 895-921.

[14] L. Cavalier; *Nonparametric statistical inverse problems*, Inverse Problem, 19(24), 034004, 2008, 19pp.

[15] K. Diethelm; *The analysis of fractional differential equation*, Springer, Berlin, 2010.

[16] S. Dipierro, E. Valdinoci et al; *Mixed local and nonlocal elliptic operators: regularity and maximum principles*, Communications in Partial Differential Equations 47(3), 2022, 585 - 629.

[17] N. V. Duc, L. D. N. Minh and N. T. Thanh; *Identifying an unknown source term in a heat equation with time - dependent coefficients*, Inverse Problems in Science and Engineering, 2020, 27pp.

[18] Yu. V. Egorov and M. A. Shubin; *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*, Springer Berlin, 2013.

[19] A. Jacquier and L. Torricelli; *Anomalous Diffusions in Option Prices: Connecting Trade Duration and the Volatility Term Structure*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 11, 2020, 1137-1167.

[20] D. N. D. Hai; *Regularization for a Riesz - Feller space fractional backward diffusion problem with a time - dependent coefficient*, Science & Technology Development, Vol 5, No. T20, 2017, 172 - 183.

[21] D. N, Hao and N. V. Duc; *Stability results for backward parabolic equations with time - dependent coefficients*, Inverse Problems, Volume 27, No. 2, 025003,2011, 20 pp.

[22] D. N. Hao, N. V, Duc and N. V. Thang; *Backward semi - linear parabolic equations with time - dependent coefficients and locally Lipschitz source*, Inverse Problems, 34, 055010, 2018, 33 pp.

[23] D. N. Hao and P. M. Hien; *Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip*, Inverse Problem.19, 2003, 833–844.

[24] P. T. Hieu and P. H. Quan; *On regularization and error estimates for the Cauchy problem of the modified inhomogeneous Helmholtz equation*, Journal of Inverse and Ill -posed Problems, 24, 2016, 515 - 526.

[25] Z. Hongwu, and Z. Xiaoju; *Regularization method for an ill - posed Cauchy problem of nonlinear elliptic equation*, Journal of Mathematics, Volume 40 Issue 4, , 2020, 395 - 407.

[26] B. Kaltenbacher, W. Rundell; *Inverse Problems for Fractional Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2023.

[27] T. Kalwarczyk, K. Kwapiszewska, K. Szczepanski, K. Sozanski, J. Szymanski, B. Michalska, P. P. Krawczyk, J. Duszynski, and R. Holyst; *Apparent Anomalous Diffusion in the Cytoplasm of Human Cells: The Effect of Probes' Polydispersity*, The Journal of Physical Chemistry B, 121, 2017, 9831–9837.

[28] Andreas Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, 1996.

[29] T. T. Khieu and V. H. Hung; *Recovering the historical distribution for nonlinear space – fractional diffusion equation with temporally dependent thermal conductivity in higher dimensional space*, Journal of Computational and Applied Mathematics ,2018, 19pp.

[30] D. C. Lamao, B.S. Huang, Y. Q. Tian et al; *Regularity results of solutions to elliptic equations involving mixed local and nonlocal operators*, AIMS Mathematics 7(3), 2022, 4199 - 4210.

[31] R. Lattes, J. L. Lions, *Methode de Quasi - Reversibility et Applications*, Dunod, Paris, 1967.

[32] T. N. Luan and T. Q. Khanh; *Determination of initial distribution for a space - fractional diffusion equation with time - dependent diffusivity*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021, 28 pp.

[33] E. Nane and N. H. Tuan; *Approximate Solutions of Inverse Problems for Nonlinear Space Fractional Diffusion Equations with Randomly Perturbed Data*, SIAM/ASA Journal of Uncertainty Quantification, Volume 6, No. 1, 2018, 302 - 338.

[34] L. H. Phong, L. M. Triet, and P. H. Quan; *On a three dimensional Cauchy problem for inhomogeneous Helmholtz equation associated with perturbed wave number*, Journal of Computational and Applied Mathematics 335, 2018, 86–98.

[35] I. Podlubny; *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.

[36] Z. Qian, C. L. Fu, and Z. P. Li; *Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 338(1), 2008, 479 - 489.

[37] Z. Qian, C. L. Fu, and X. T. Xiong; *Fourth - order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 192, 2006, 205 - 218.

[38] H. H. Qin, and T. Wei; *Modified regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation*, Applied Mathematical Modelling 33, 2009, 2334 - 2348.

[39] H. H. Qin, and T. Wei; *Two regularization methods for the Cauchy problem of the Helmholtz equation*, Applied Mathematical Modelling 34, , 2010, 947 - 967.

[40] P. H. Quan, P. T. Hieu, and V. V. Canh; *Regularizing a final value problem for nonlinear modified Helmholtz equation with randomly perturbed data*, Applicable Analysis, 102, 2023, 610 - 634.

[41] P. H. Quan, L. M. Triet and D. D. Trong; *A regularization of the backward problem for nonlinear parabolic equation with time – dependent coefficient*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2012, 20pp.

[42] P. H. Quan, D. D. Trong, L. M. Triet and N. H. Tuan; *A modified quasi - boundary value method for regularizing of a backward problem with time - dependent coefficient*, Inverse Problems in Science and Engineering, Volume 19, no.3, 2011, 409-423.

[43] G. F. Roach, I. G. Stratis, and A. N. Yannacopoulos; *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*, Princeton University Press, 2012.

[44] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev; *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, 1993.

[45] M. Samuel and A. Thomas; *On fractional Helmholtz equations*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 13, 2010, 295–308.

[46] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, and J. Zhang; *Regularity results for solutions of mixed local and nonlocal elliptic equations*, Mathematische Zeitschrift, 2022, 1855 - 1878.

[47] K. Suleiman, Q. Song, X. Zhang, S. Liu, and L. Zheng; *Anomalous diffusion in a circular comb with external velocity field*, Chaos Solitons and Fractals, 155, 2022, 111742-111759.

[48] A.N. Tikhonov and V. Y. Arsenin; *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston, New York, 1977.

[49] L. M. Triet, T. T. Khieu, T. Q. Khanh and V. H. Hung; *On a space fractional backward diffusion problem and its approximation of local solution*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 26pp.

[50] L. M. Triet, P. H. Quan, L. H. Phong, and V. V. Canh; *Recovering the initial wave amplitude for nonlinear elliptic equation with locally Lipschitz source in multiple - dimensional domain*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 16pp.

[51] L. M. Triet, P. H. Quan, D. D. Trong and N. H. Tuấn;*A backward parabolic equation with a time - dependent coefficient : Regularization and error estimates*, Journal of Computational and Applied Mathematics (237), 2013, 432 - 441.

[52] D. D. Trong, T. D. Khanh, N. H. Tuan, and N. D. Minh; *Nonparametric regression in a statistical modified Helmholtz equation using the Fourier spectral regularization*, Statistics, 49, 2015, 267–290,.

[53] D. D. Trong, P. H, Quan, T. V. Khanh and N. H. Tuan; *A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate*, Journal for Analysis and its Applications, Volume 26, 2007, 231-245.

[54] D. D. Trong, P. H. Quan and N. H. Tuan; *A quasi -boundary value method for regularizing nonlinear ill-posed problems*, Electronic Journal of Differential Equations, Volume 2009, No. 109, 1-16.

[55] D. D. Trong and N. H. Tuan; *Regularization and error estimate for the nonlinear backward heat problem using a method of integral equation*, Nonlinear Analysis, Volume 71, 2009, 4167-4176.

[56] D. D. Trong, N. H. Tuan and P. H. Quan; *A new version of quasi - boundary value method for a 1-D nonlinear ill-posed heat problem*, Journal of Inverse Ill - posed Problems, Volume 17, 2009, 911-929.

[57] N. H. Tuan, D. N. D. Hai, N. V. Thinh and M. Kirane; *On a Riesz - Feller space - fractional backward diffusion problem with a nonlinear source*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 2017, 103 - 126.

[58] N. H. Tuan, E. Nane, D. O' Regan and N. D. Phuong; *Approximation of mild solutions of a semilinear fractional elliptic equation with random noise*, Proceedings of The American Mathematical Society, 2020, 14pp.

[59] N. H. Tuan, and P. H. Quan; *A Cauchy problem for Helmholtz equation: Regularization and error estimates*, Acta Universitatis Apulensis 25, 2011, 177 - 188.

[60] N. H. Tuan, P. H. Quan, D. D. Trong and L. M. Triet; *On a backward heat problem with time - dependent coefficient : Regularization and error estimates*, Applied Mathematics and Computation, 219, 2013, 6066 - 6073.

[61] N. H. Tuan, L. D. Thang, D. D. Trong, and V. A. Khoa; *Approximation of mild solutions of the linear and nonlinear elliptic equations*, Inverse Problems in Science and Engineering, 2015, 30 pp.

[62] N. H. Tuan, D. D. Trong, D. N. D. Hai and D. D. X. Thanh; *A Riesz - Feller space - fractional backward diffusion problem with a time - dependent coefficient: Regularization and error estimates*, Mathematical Methods in The Applied Sciences, Volume 40, 2017, 4040 - 4064.

[63] N. H. Tuan, D. D. Trong, and P. H. Quan; *A note on a Cauchy problem for the Laplace equation: Regularization and error estimates*, Applied Mathematics and. Computation, 217 (7), 2010, 2913 - 2922.

[64] A. J. Turski, B. Atamaniuk, and E. Turska; *Fractional derivative analysis of Helmholtz and paraxial-wave equations*, Journal of Technical Physics, 44(2), 2003, 193 - 206.

[65] T. Q. Viet, N. H. Tuan, N. V. Thinh, and D. D. Trong; *A general filter regularization method to solve the three dimensional Cauchy problem for inhomogeneous Helmholtz- type equations: Theory and numerical simulation*, Applied Mathematical Modelling, 2014, 20pp.

[66] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Determining the initial distribution in space - fractional diffusion by a negative exponential regularization method*, Inverse Problems in Science and Engineering, 25, No.7, 2017, 965 - 977.

[67] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Recovering the initial distribution for space - fractional diffusion equation by a logarithmic regularization method*, Applied Mathematics Letters 2016, 965 - 977.

[68] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Solving the backward problem for space - fractional diffusion equation by a fractional Tikhonov regularization method*, Mathematics and Computers in Simulation, Volume 148, 2018, 37 - 47.