

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

NGUYỄN QUANG HUY

MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC VỚI
DỮ LIỆU NGẪU NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ
Chuyên ngành: Toán Giải Tích

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2026

UBND THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

NGUYỄN QUANG HUY

MỘT SỐ BÀI TOÁN NGƯỢC VỚI
DỮ LIỆU NGẪU NHIÊN

LUẬN ÁN TIẾN SĨ
CHUYÊN NGÀNH: TOÁN GIẢI TÍCH

Mã số : 9460102

KHÓA: 20.1

Người hướng dẫn khoa học:

PGS.TS. PHẠM HOÀNG QUÂN

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2026

Mục lục

Lời cam đoan	ii
Lời cảm ơn	iii
Danh mục ký hiệu	iv
Danh mục bảng biểu, hình vẽ	v
MỞ ĐẦU	1
1 CƠ SỞ LÝ THUYẾT	12
1.1 Một số không gian hàm	12
1.2 Chuỗi Fourier và toán tử Laplace bậc không nguyên	15
1.3 Một số kiến thức xác suất và thống kê	17
1.4 Bài toán ngược trong thống kê	20
1.5 Định lý ánh xạ co và một số bất đẳng thức	22
2 BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN	24
2.1 Giới thiệu bài toán	24
2.2 Dạng nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) và chứng minh tính không chỉnh	25

2.3	Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (2.1)- (2.3)	30
2.4	Ví dụ minh họa	44
3	BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH HELMHOLTZ PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN	52
3.1	Giới thiệu bài toán	52
3.2	Dạng nghiệm của bài toán (3.1) - (3.4) và chứng minh tính không chỉnh	53
3.3	Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (3.1)- (3.4)	59
3.4	Ví dụ minh họa	74
	KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ	81
	DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ	82
	TÀI LIỆU THAM KHẢO	83

Lời cam đoan

Luận án được tôi hoàn thành dưới sự hướng dẫn của PGS. TS. Phạm Hoàng Quân. Tôi xin cam đoan rằng các kết quả được trình bày trong luận án là mới, trung thực và chưa từng được ai công bố trong công trình nào khác. Các bài báo có đồng tác giả đã được các đồng tác giả cho phép sử dụng để viết luận án này.

Lời cảm ơn

Đầu tiên, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành và sâu sắc đến Thầy hướng dẫn khoa học của tôi PGS. TS. Phạm Hoàng Quân. Thầy đã tận tình hướng dẫn và động viên tôi trong suốt quá trình tôi làm luận án.

Đồng thời, tôi xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Lê Minh Triết cùng các thành viên trong nhóm nghiên cứu Toán Giải tích tại Trường Đại học Sài Gòn vì sự hỗ trợ, giúp đỡ nhiệt tình trong suốt quá trình tôi học và làm luận án.

Tôi cũng xin bày tỏ lòng cảm ơn sâu sắc đến các đồng nghiệp trong Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Công nghệ kỹ thuật Tp. HCM vì sự quan tâm chia sẻ và tạo điều kiện thuận lợi để tôi tập trung hoàn thành luận án.

Ngoài ra, tôi cũng xin chân thành cảm ơn quý Thầy Cô trong hội đồng chấm luận án Tiến sĩ đã dành nhiều thời gian, công sức để đọc luận án và cho tôi những lời nhận xét quý báu để tôi hoàn thiện luận án.

Cuối cùng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình tôi, những người đã luôn quan tâm, động viên, hỗ trợ tôi về mọi mặt, nhất là về mặt tinh thần để tôi học tập tốt.

Danh mục ký hiệu

x, y	: Biến không gian.
t	: Biến thời gian.
$L^2(0, \pi)$: Không gian các hàm bình phương khả tích trên $(0, \pi)$.
$H^s(0, \pi)(s > 0)$: Không gian thang Hilbert trên $(0, \pi)$.
u_t	: Đạo hàm riêng cấp một của u theo biến t .
u_{xx}	: Đạo hàm riêng cấp hai của u theo biến x .
u_{yy}	: Đạo hàm riêng cấp hai của u theo biến y .
$(-\Delta)^\alpha(\alpha \in (0, 1))$: Toán tử Laplace bậc không nguyên.
\mathbb{R}	: Tập số thực.
$\mathbb{E}(X)$: Kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X .
$\ \cdot \ $: Chuẩn trên không gian $L^2(0, \pi)$.

Danh mục bảng biểu, hình vẽ

Bảng 2.1 Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(\cdot, t)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(\cdot, t)$ tại các thời điểm khác nhau tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ và $M = 100$.

Bảng 3.1 Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(\cdot, y)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(\cdot, y)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ and $M = 100$.

Hình 2.1 Dữ liệu chính xác $g(x)$ và dữ liệu nhiễu $g_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

Hình 2.2 Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{exact}(x, t)$.

Hình 2.3 Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1$.

Hình 2.4 Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.01$.

Hình 2.5 Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.001$.

Hình 2.6 Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0)$ và các nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, 0)$.

Hình 2.7 Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0.5)$ và các nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, 0.5)$.

Hình 2.8 Kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại các thời điểm t khác nhau.

Hình 3.1. Dữ liệu chính xác $g(x)$ và dữ liệu nhiễu $g_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

Hình 3.2. Dữ liệu chính xác $h(x)$ và dữ liệu nhiễu $h_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

Hình 3.3. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, y)$.

Hình 3.4. Nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1$.

Hình 3.5. Nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.01$.

Hình 3.6. Nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.001$.

Hình 3.7. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0.5)$ và nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, 0.5)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

Hình 3.8. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0.9)$ và nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, 0.9)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

MỞ ĐẦU

Bài toán ngược cho phương trình đạo hàm riêng là một dạng bài toán có nhiều ứng dụng quan trọng trong nhiều ngành khoa học và kỹ thuật như bài toán truyền nhiệt ngược, bài toán truyền sóng, bài toán tán xạ ngược, xử lý ảnh ngược... Những năm giữa thế kỷ XX, cùng với việc phát triển các công cụ tính toán hiện đại, các bài toán ngược đã được các nhà toán học trên thế giới xem xét mà tiêu biểu là các công trình của Tikhonov [48], Lions [31]. Từ đó cho đến nay, các bài toán ngược ngày càng được nhiều nhà toán học quan tâm do những ứng dụng xuất phát từ thực tiễn. Một đặc trưng thường gặp của các bài toán ngược là tính không chỉnh, đặc biệt là tính không ổn định của nghiệm. Theo Hadamard [28], chúng ta có định nghĩa bài toán chỉnh như sau:

Cho X và Y là các không gian định chuẩn, $K : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ (có thể tuyến tính hoặc phi tuyến). Phương trình $Kx = y$ được gọi là chỉnh nếu ba điều kiện sau được thỏa:

1. *Tính tồn tại nghiệm*: Với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
2. *Tính duy nhất*: Với mọi $y \in Y$ thì tồn tại nhiều nhất một $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
3. *Tính ổn định nghiệm*: Nghiệm x của bài toán phải phụ thuộc liên tục vào y , nghĩa là với mọi dãy $(x_n) \subset X$ sao cho $Kx_n \rightarrow Kx$ khi $n \rightarrow \infty$ thì $x_n \rightarrow x$.

Một phương trình không thỏa ít nhất một trong ba tính chất trên gọi là không chỉnh.

Tính ổn định nghiệm của bài toán ngược là vấn đề mà các nhà toán học hiện nay rất quan tâm. Khi một bài toán không thỏa tính ổn định nghiệm, từ một sai số nhỏ trong dữ liệu đo đạc có thể dẫn đến sai số rất lớn của nghiệm tương ứng. Do đó, chúng ta cần xây dựng nghiệm xấp xỉ

ổn định cho bài toán mà ta gọi là chỉnh hóa bài toán. Vì thế, việc khảo sát tính không chỉnh và thiết lập các phương pháp chỉnh hóa cho các bài toán ngược đã thu hút được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu trong và ngoài nước.

Trong thời gian gần đây, các phương trình chứa đạo hàm bậc không nguyên đã trở nên phổ biến nhờ tính ứng dụng của chúng trong việc mô hình hóa các hiện tượng trong tự nhiên và kỹ thuật mà không thể được mô hình hóa bằng các phương trình có đạo hàm bậc nguyên như mô hình hóa hiện tượng khuếch tán dị thường và mô hình các hệ thống phức. Nhờ những ứng dụng rộng rãi của nó trong khoa học, kỹ thuật, tài chính, các bài toán ngược cho các phương trình đạo hàm riêng có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu trong thời gian gần đây.

Trong thực tế, chúng ta khó có được giá trị chính xác của dữ liệu bài toán vì sai số nảy sinh trong quá trình đo đạc. Tuy nhiên, do tác động của môi trường cũng như sai số trong quá trình thu thập dữ liệu dẫn đến dữ liệu của bài toán là một đại lượng ngẫu nhiên có độ lệch so với dữ liệu chính xác và độ lệch này là một nhiễu ngẫu nhiên. Mô hình nhiễu ngẫu nhiên gần với thực tế hơn và đã được sử dụng bởi nhiều nhà khoa học. Một quá trình ngẫu nhiên rất phổ biến là nhiễu trắng Gauss vì các ứng dụng đa dạng của nó trong các lĩnh vực khác nhau bao gồm khoa học, kỹ thuật và kinh tế như hệ thống điện tử, xử lý tín hiệu, mô hình kinh tế... Chính vì vậy, các bài toán ngược với dữ liệu nhiễu trắng Gauss đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu.

Vì những phân tích trên, trong luận án chúng tôi khảo sát một số bài toán ngược có chứa đạo hàm bậc không nguyên cho phương trình đạo hàm riêng với dữ liệu ngẫu nhiên. Cụ thể, chúng tôi tập trung nghiên cứu hai

dạng bài toán sau:

Bài toán 1: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Phương trình dạng parabolic dùng để mô tả các hiện tượng vật lý như quá trình truyền nhiệt, quá trình khuếch tán... Phương trình dạng parabolic thuần nhất có dạng

$$u_t(x, t) - Du_{xx}(x, t) = 0, \quad (1)$$

trong đó $u(x, t)$ là nhiệt độ hay nồng độ chất tan tại vị trí x và thời gian t , D là hệ số khuếch tán.

Phương trình parabolic bậc không nguyên được phát triển từ phương trình parabolic cổ điển, trong đó đạo hàm cổ điển được thay bằng đạo hàm bậc không nguyên. Phương trình dạng này được sử dụng để mô hình hóa cho các quá trình khuếch tán dị thường, trong đó sự lan truyền của các đại lượng như nhiệt, khối lượng hoặc động lượng không tuân theo các quy luật khuếch tán thông thường được mô tả bởi định luật Fick. Bài toán ngược cho phương trình dạng parabolic bậc không nguyên có nhiều ý nghĩa trong nhiều ngành khoa học, kỹ thuật, tài chính như xác định nhiệt độ ban đầu của một vật thể trong các vật liệu phức tạp và độ thấm khác nhau, xác định sự lan truyền của các chất trong các mô sinh học có hình dạng phức tạp và độ khuếch tán khác nhau, việc đo đạc di chuyển của các mạch nước ngầm, xác định và kiểm soát các nguồn ô nhiễm trong khoa học môi trường, xác định phân bố dân cư tại thời điểm ban đầu, phân tích sự lan truyền thông tin hoặc biến động giá trong các thị trường tài chính theo thời gian... (xem [10, 19, 27, 47])

Bài toán 2: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Phương trình Helmholtz là một phương trình đạo hàm riêng dạng el-

liptic cấp hai phổ biến trong vật lý và kỹ thuật, được đặt theo tên của nhà khoa học người Đức Hermann von Helmholtz. Phương trình Helmholtz thuần nhất trong miền ba chiều có dạng như sau

$$\Delta u(x, y, z) + k^2 u(x, y, z) = 0, \quad (2)$$

trong đó Δ là toán tử Laplace, $u(x, y, z)$ là hàm biên độ sóng tại điểm $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, k là hệ số sóng.

Phương trình Helmholtz thường được sử dụng để mô tả các hiện tượng lan truyền sóng như sóng âm, sóng điện từ và các loại hiện tượng dao động khác. Các ứng dụng của nó bao phủ nhiều lĩnh vực như vật lý, quang học, cơ học, điện từ học và âm thanh học. Ngoài ra, phương trình Helmholtz đóng vai trò quan trọng trong các bài toán xử lý tín hiệu và xử lý hình ảnh.

Phương trình Helmholtz có chứa đạo hàm bậc không nguyên là dạng phát triển của phương trình Helmholtz cổ điển trong đó đạo hàm cổ điển được thay bằng đạo hàm bậc không nguyên. Phương trình Helmholtz bậc không nguyên được sử dụng để mô hình hóa sự truyền sóng trong môi trường không đồng nhất, các quá trình khuếch tán dị thường và các hiện tượng khác xảy ra do hiệu ứng phi cục bộ hoặc tính chất fractal của môi trường mà phương trình Helmholtz cổ điển mô tả không đầy đủ. Ngoài ra, nó còn có ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau trong vật lý, sinh học, y học.

Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz có chứa đạo hàm bậc không nguyên đã được quan tâm nghiên cứu trong các lĩnh vực khác nhau như âm học, địa vật lý, sinh hóa, điện từ... Chẳng hạn như việc xác định sự lan truyền âm thanh trong môi trường có cấu trúc phức tạp như vật liệu xốp hoặc mô sinh học, nghiên cứu sự truyền sóng điện từ trong môi trường không đồng nhất, phân tích tương tác sóng với bề mặt gồ ghề hoặc hình

học fractal... (xem [11, 45, 64]).

Tổng quan tình hình nghiên cứu trong nước và thế giới

Bài toán 1: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Cho $D = (0, \pi)$, xét bài toán tìm phân bố nhiệt $u(x, t)$, $t \in [0, T]$ thỏa mãn phương trình khuếch tán sau

$$u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in D \times (0, T), \quad (3)$$

với các điều kiện

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in D, \quad (5)$$

trong đó $T > 0$ là thời điểm cuối, $a(t)$ là hệ số khuếch tán phụ thuộc thời gian, $g(x)$ là dữ liệu cuối, f là hàm nguồn nhiệt phi tuyến và $(-\Delta)^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) là toán tử Laplace bậc không nguyên.

Trong trường hợp $a(t) = 1$ và $\alpha = 1$, bài toán (3) - (5) là bài toán nhiệt ngược thời gian cổ điển và đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học (xem [53, 54, 55, 56]). Trong [53], Đặng Đức Trọng và các đồng tác giả đã khảo sát bài toán trong trường hợp nguồn nhiệt phi tuyến

$$u_t - u_{xx} = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \quad (6)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

$$u(x, T) = \phi(x), \quad x \in (0, \pi). \quad (8)$$

Các tác giả đã kết hợp phương pháp tựa khả nghịch (QR) và phương pháp tựa giá trị biên (QBV) để chỉnh hóa bài toán (6) - (8) và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $\alpha = 1$, $a(t) \neq 1$, bài toán (3) - (5) đã được khảo sát bởi nhiều nhà nghiên cứu (xem [21, 22, 41, 42]). Trong [41], Phạm Hoàng

Quân cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán sau

$$u_t(x, t) - a(t)u_{xx}(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \quad (9)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (10)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in [0, \pi]. \quad (11)$$

Để chỉnh hóa bài toán (9)-(11), các tác giả đã sử dụng phương pháp tựa giá trị biên có điều chỉnh và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $a(t) = 1$ và $\alpha \neq 1$, bài toán (3) - (5) cũng đã được quan tâm nghiên cứu nhiều (xem [49, 66, 67, 68]). Trong [49], Lê Minh Triết và các đồng tác giả đã khảo sát bài toán trong trường hợp nguồn nhiệt không thuần nhất

$$u_t(x, t) + (-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T], \quad (12)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 0. \quad (14)$$

Các tác giả đã chỉnh hóa bài toán (12)- (14) bằng phương pháp chặt cụt Fourier và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong trường hợp $a(t) \neq 1$ và $\alpha \neq 1$, bài toán (3) - (5) đã được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu (xem [29, 32]). Trong [32], Trà Quốc Khanh và đồng tác giả đã sử dụng phương pháp Fourier để chỉnh hóa bài toán trong trường hợp không thuần nhất trên miền không bị chặn bằng phương pháp hàm lọc và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder. Trong [29], Trần Thị Khiếu và cộng sự đã sử dụng phương pháp Tikhonov để chỉnh hóa bài toán trên miền không bị chặn trong trường hợp phi tuyến

$$u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T], \quad (15)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (16)$$

và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Từ dữ liệu đầu vào g được cung cấp tại thời điểm cuối $t = T$, mục tiêu của bài toán (3) - (5) là tìm phân bố nhiệt độ $u(x, t)$ tại các thời điểm trước đó $t \in [0, T)$. Tuy nhiên, trong thực tế, chúng ta khó có được dữ liệu chính xác mà chỉ có được dữ liệu nhiễu g_ε với sai số dữ liệu $\varepsilon > 0$. Trong các nghiên cứu trên, các tác giả đã khảo sát bài toán (3) - (5) trong trường hợp dữ liệu có nhiễu xác định.

Ngoài ra, trong [33], Erkan Nane và đồng tác giả đã chỉnh hóa bài toán

$$u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\beta u(x, t) = F(u) + g(x, t), \quad (x, t) \in (0, \pi) \times [0, T], \quad (17)$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad (18)$$

$$u(x, T) = u_T(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (19)$$

trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu ngẫu nhiên rời rạc. Các tác giả đã sử dụng một phương pháp tựa khả nghịch mới và thu được ước lượng sai số dạng Hölder.

Theo hiểu biết của chúng tôi, hiện tại có rất ít nghiên cứu đối với bài toán (3)-(5) cho trường hợp dữ liệu nhiễu tuân theo mô hình nhiễu trắng Gauss. Vì vậy, trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán trên trong trường hợp dữ liệu thỏa mãn mô hình

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\xi(x), \quad (20)$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và ξ là một nhiễu trắng Gauss.

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle = \langle g, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \quad (21)$$

với $n = \overline{1, N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(0, \pi)$.

Mô hình nhiễu (20) là gần với thực tế hơn, mặc dù vậy, việc chỉnh hóa nghiệm của bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) sẽ khó khăn hơn vì

nghiệm của bài toán chứa đại lượng có nhiều ngẫu nhiên. Đặc biệt, việc chỉnh hóa bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) bằng phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier chưa được ai nghiên cứu vì tính khó trong việc lựa chọn các tham số chỉnh hóa. Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt chuỗi Fourier, chúng tôi đã chỉnh hóa bài toán (3) - (5) với mô hình nhiễu (20) và đưa ra đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác có dạng Hölder.

Bài toán 2: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm hàm biên độ sóng $u(x, y)$ thỏa mãn phương trình Helmholtz như sau

$$\Delta u(x, y) - (-\Delta)^\alpha u(x, y) + k^2 u(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1), \quad (22)$$

với các điều kiện

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (23)$$

$$u(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (24)$$

$$u_y(x, 1) = h(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (25)$$

trong đó $(-\Delta)^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) là toán tử Laplace bậc không nguyên, $k \in (0, \sqrt{2})$ là hệ số sóng cho trước, $f(x, y, u)$ là hàm nguồn phi tuyến. Các hàm số $g(x)$ và $h(x)$ là các dữ liệu tại $y = 1$.

Trong trường hợp $\alpha = 1$, bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz

$$\Delta u(x, y) + k^2 u(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1), \quad (26)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in (0, 1), \quad (27)$$

$$u_y(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (28)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (29)$$

đã được quan tâm nghiên cứu bởi nhiều nhà toán học (xem [23, 38, 39, 59, 65]). Trong [59], Phạm Hoàng Quân và các đồng tác giả đã sử dụng phương pháp tựa khả nghịch có điều chỉnh để chỉnh hóa bài toán (26) - (29) trong trường hợp thuần nhất $f = 0$ và thu được tốc độ hội tụ dạng logarit. Trong [65], nhóm tác giả Trần Quốc Việt đã chỉnh hóa bài toán (26)- (29) trong trường hợp không thuần nhất $f \neq 0$ trên miền ba chiều bằng cách áp dụng phương pháp hàm lọc tổng quát và thu được tốc độ hội tụ dạng logarit.

Trong trường hợp $k = 0$, bài toán Cauchy cho phương trình Laplace

$$\Delta u(x, y) = f(x, y, u), (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1), \quad (30)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, y \in (0, 1), \quad (31)$$

$$u(x, 0) = g(x), x \in (0, \pi), \quad (32)$$

$$u_y(x, 0) = h(x), x \in (0, \pi), \quad (33)$$

đã được khảo sát bởi nhiều nhóm nghiên cứu (xem [25, 36, 37]). Trong [36], nhóm tác giả Chu Li Fu đã sử dụng phương pháp chặt cụt để chỉnh hóa bài toán (30) - (33) trong trường hợp thuần nhất và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder. Trong [25], nhóm tác giả Z. Hongwu đã chỉnh hóa bài toán (30) - (33) trong trường hợp phi tuyến bằng phương pháp tựa giá trị biên cải tiến và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Trong [24], Phan Trung Hiếu cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán Cauchy cho phương trình Helmholtz có điều chỉnh trong trường hợp hàm nguồn không thuần nhất như sau

$$\Delta u(x, y) - k^2 u(x, y) = f(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in (0, 1), \quad (34)$$

$$u_y(x, 0) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}, \quad (35)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), x \in \mathbb{R}. \quad (36)$$

Sử dụng phương pháp chặt cụt, các tác giả đã chỉnh hóa bài toán (34) - (36) và thu được ước lượng sai số có dạng Hölder.

Trong các nghiên cứu kể trên, các tác giả đã nghiên cứu bài toán (22) - (25) trong trường hợp dữ liệu bị nhiễu xác định.

Trong [40], Phạm Hoàng Quân cùng cộng sự đã nghiên cứu bài toán

$$u_{yy}(x, y) - (-\Delta)^\alpha u(x, y) - k^2 u(x, y) = S(u) + h(x, y), \quad (37)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (38)$$

$$u(x, 1) = f(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (39)$$

$$u_y(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (40)$$

trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu ngẫu nhiên rời rạc. Trong đó, các tác giả đã sử dụng phương pháp hồi quy chuỗi lượng giác kết hợp phương pháp chặt cụt chuỗi để chỉnh hóa bài toán (37) - (40) và thu được tốc độ hội tụ dạng Hölder.

Theo hiểu biết của chúng tôi, cho tới thời điểm hiện tại, bài toán (21) - (24) với dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu trắng Gauss

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= g(x) + \varepsilon \xi(x), \\ h_\varepsilon(x) &= h(x) + \varepsilon \xi(x), \end{aligned} \quad (41)$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và ξ là một nhiễu trắng Gauss chưa được quan tâm nghiên cứu.

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\begin{aligned} \langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle &= \langle g, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \\ \langle h_\varepsilon, \phi_n \rangle &= \langle h, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \end{aligned} \quad (42)$$

với $n = \overline{1, N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(0, \pi)$.

Trong luận án này, chúng tôi nghiên cứu bài toán (21) - (24) thỏa mô hình nhiễu (41). Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier, chúng tôi thiết lập nghiệm chỉnh hóa cho bài toán và đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chính xác.

Phần chính của luận án được cấu trúc như sau.

Mở đầu

Chương 1:Cơ sở lý thuyết.

Chương 2: Bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian. Trong chương hai, chúng tôi xây dựng công thức biểu diễn nghiệm của bài toán, đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán, xây dựng nghiệm chỉnh hóa, đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác, trình bày ví dụ số minh họa.

Chương 3: Bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến chứa đạo hàm bậc không nguyên theo biến không gian. Trong chương ba, chúng tôi xây dựng công thức biểu diễn nghiệm của bài toán, đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán, xây dựng nghiệm chỉnh hóa, đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác, trình bày ví dụ số minh họa.

Kết luận

Tài liệu tham khảo

Chương 1

CƠ SỞ LÝ THUYẾT

Trong chương này, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản được sử dụng trong luận án.

1.1 Một số không gian hàm

1.1.1 Không gian $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ (Xem [3])

Định nghĩa 1.1. Cho Ω là một tập đo được trong \mathbb{R}^k và hàm f đo được trên Ω . Với $1 \leq p < \infty$, tập hợp tất cả các hàm f thỏa $|f|^p$ khả tích trên Ω gọi là không gian $L^p(\Omega)$ và

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Đặc biệt, khi $p = 2$ ta có $L^2(\Omega)$ là không gian các hàm bình phương khả tích trên Ω .

Định lý 1.2. Không gian $L^p(\Omega)$ với chuẩn $\|\cdot\|_p$ được định nghĩa như trên là một không gian *Banach*.

1.1.2 Không gian Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) (Xem [6])

Định nghĩa 1.3. Cho tập mở $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Không gian $C^m(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm liên tục mà các đạo hàm riêng của nó đến

cấp m cũng liên tục trên Ω . Ta quy ước $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm liên tục trên Ω và

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C^m(\Omega)$$

Định nghĩa 1.4. Cho hàm đo được $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Đặt

$$A = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$$

Khi đó, bao đóng của A trong \mathbb{R}^k được gọi là giá của u .

Định nghĩa 1.5. Không gian $C_c^\infty(\Omega)$ là không gian gồm tất cả các hàm $u \in C^\infty(\Omega)$ và có giá compact chứa trong Ω .

Định nghĩa 1.6. Cho tập mở $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k, k \in \mathbb{N}$. Ta đặt

$$L_{\text{loc}}^1(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ đo được} : f \in L^1(\omega) \text{ với mọi } \omega \subseteq \mathbb{R}^k \text{ thỏa } \bar{\omega} \text{ là tập compact chứa trong } \Omega\}$$

Định nghĩa 1.7. (Đạo hàm suy rộng)

Cho $f \in L_{\text{loc}}^1(\Omega), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{Z}^k, \alpha_i \geq 0 (i = 1, \dots, k)$. Hàm $g_\alpha \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ gọi là đạo hàm riêng suy rộng thứ α của f nếu

$$\int_{\Omega} f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} g_\alpha \varphi dx,$$

với mọi $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Ở đây, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$ và $D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_k^{\alpha_k}}$.

Định nghĩa 1.8. Với $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p \leq \infty$, ta định nghĩa

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

với chuẩn $\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

Đặc biệt, nếu $p = 2$, ta kí hiệu $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

1.1.3 Không gian $C([0, T]; X)$ (Xem [5])

Định nghĩa 1.9. Cho X là một không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_X$. Không gian $C([0, T]; X)$ là không gian gồm tất cả các hàm số liên tục $u : [0, T] \rightarrow X$ với chuẩn

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

1.1.4 Không gian Hilbert (Xem [7])

Định nghĩa 1.10. Cho H là một không gian vectơ với $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Ánh xạ

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{K},$$

được gọi là *tích vô hướng* trên H nếu

- i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, với mọi $x, y \in H$,
- ii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, với mọi $x, y, z \in H$,
- iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, với mọi $x, y \in H$, với mọi $\alpha \in \mathbb{K}$,
- iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, với mọi $x \in H$ và $\langle x, x \rangle = 0$ khi và chỉ khi $x = 0$.

Khi đó, $\langle x, y \rangle$ được gọi là tích vô hướng của hai vectơ x và y .

Bây giờ, chúng ta đặt $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, với mọi $x \in H$ thì $(H, \|\cdot\|)$ là một không gian định chuẩn. Chuẩn $\|\cdot\|$ này là chuẩn cảm sinh bởi tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ trên H .

Cho H là một không gian vectơ với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và chuẩn cảm sinh $\|\cdot\|$. Khi đó, ta gọi H là không gian *Hilbert* nếu $(H, \|\cdot\|)$ là không gian *Banach*.

Định lý 1.11. Cho H là một không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$ và $\|\cdot\|$ là chuẩn sinh bởi tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Khi đó

- i) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, với mọi $x, y \in H$ (Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz),

ii) $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle$, với mọi $x, y \in H$,

iii) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, với mọi $x, y \in H$ (Đẳng thức hình bình hành).

1.2 Chuỗi Fourier và toán tử Laplace bậc không nguyên

Định nghĩa 1.12. (Xem [7]) Cho H là một không gian Hilbert với tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hệ $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+} \subset H$ được gọi là một hệ trực chuẩn nếu

$$\langle \phi_p, \phi_q \rangle = \begin{cases} 1, & \text{nếu } p = q, \\ 0, & \text{nếu } p \neq q, \end{cases} \quad \text{với } p, q \in \mathbb{Z}^+.$$

Định nghĩa 1.13. (Xem [7]) Hệ trực chuẩn $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ gọi là đầy đủ nếu với $f \in H$, ta có

$$\langle f, \phi_p \rangle = 0, \forall p \in \mathbb{Z}^+ \text{ thì } f = 0.$$

Định nghĩa 1.14. (Xem [7]) Cho hàm $u \in H$, với hệ trực chuẩn $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$, ta đặt

$$u_p = \langle u, \phi_p \rangle, \forall p \in \mathbb{Z}^+.$$

Khi đó $\sum_{p=1}^{\infty} u_p \phi_p$ được gọi là chuỗi Fourier của u ứng với hệ trực chuẩn $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$.

Định lý 1.15. (Xem [7]) Cho $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ là một hệ trực chuẩn trong không gian Hilbert thực H . Khi đó các mệnh đề sau là tương đương

i) $\{\phi_p\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ,

ii) $\forall u \in H, u = \sum_{p=1}^{\infty} \langle u, \phi_p \rangle \phi_p$, (khai triển chuỗi Fourier),

iii) $\forall u \in H, \|u\|_H^2 = \sum_{p=1}^{\infty} c_p^2$, với $c_p = \langle u, \phi_p \rangle$, (đẳng thức Parseval).

Định lý 1.16. (Xem [7]) Hệ lượng giác $\left\{ \phi_p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(px) \right\}_{p \in \mathbb{Z}^+}$ là hệ trực chuẩn đầy đủ trong $L^2(0, \pi)$.

Bổ đề 1.17. (Xem [18]) Cho $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ là các trị riêng của toán tử Laplace $-\frac{d^2}{dx^2}$ và $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ là các vector riêng tương ứng thỏa mãn

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}\phi_n(x) = \lambda_n\phi_n(x), x \in (0, \pi), \\ \phi_n(0) = \phi_n(\pi) = 0. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\lambda_n = n^2 \text{ và } \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx). \quad (1.1)$$

Chú ý rằng $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ là một cơ sở trực chuẩn của $L^2(0, \pi)$.

Định nghĩa 1.18. (Xem [26]) Cho $v \in L^2(0, \pi)$. Với mỗi $\alpha > 0$, toán tử Laplace bậc không nguyên được định nghĩa bởi

$$(-\Delta)^\alpha v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} \langle v, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

trong đó $\phi_n(x)$ được cho trong Bổ đề 1.17.

Định nghĩa 1.19. (Không gian thang Hilbert) (Xem [26]). Với $s > 0$ và $\phi_n(x)$ được cho trong Bổ đề 1.14, không gian $H^s(0, \pi)$ được định nghĩa là

$$H^s(0, \pi) = \left\{ v \in L^2(0, \pi) : \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |\langle v, \phi_n \rangle|^2 < \infty \right\},$$

và

$$\|v\|_{H^s(0, \pi)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} |\langle v, \phi_n \rangle|^2 \right)^{1/2}.$$

Chú ý rằng $H^s(0, \pi)$ là một không gian Hilbert được trang bị tích vô hướng

$$\langle f, g \rangle_{H^s(0, \pi)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2s} \langle f, \phi_n \rangle \langle g, \phi_n \rangle.$$

1.3 Một số kiến thức xác suất và thống kê

1.3.1 Biến ngẫu nhiên - Hàm mật độ (Xem [8])

Định nghĩa 1.20. Cho Ω là một tập khác \emptyset , cho \mathcal{F} là tập các tập con của Ω . Ta nói \mathcal{F} là một σ -đại số khi

- a) $\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \Omega \in \mathcal{F},$
- b) Nếu $A \in \mathcal{F}$ thì $\Omega \setminus A \in \mathcal{F},$
- c) Nếu $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ thì $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$

Định nghĩa 1.21. Cho Ω là tập khác \emptyset , cho \mathcal{F} là σ -đại số trên Ω . Độ đo xác suất \mathbb{P} là một hàm biến mọi tập $A \in \mathcal{F}$ thành một số thuộc $[0, 1]$, ký hiệu là $\mathbb{P}(A)$. Ta có

- a) $\mathbb{P}(\Omega) = 1,$
- b) (Công tính đếm được) Nếu với mọi $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ sao cho $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$ thì

$$\mathbb{P} \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Bộ ba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ gọi là không gian xác suất.

Định nghĩa 1.22. Cho biến ngẫu nhiên $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trên không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Giả sử rằng tồn tại hàm khả tích $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ sao cho

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t) dt.$$

Khi đó X là một biến ngẫu nhiên liên tục. Hàm f là hàm mật độ xác suất của X .

Hàm phân phối xác suất tích lũy $F(x)$ của X được biểu diễn dưới dạng

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Định lý 1.23. Hàm mật độ xác suất thỏa mãn tính chất sau

- a) $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$,
- b) $f(x) = F'(x)$ tại mọi điểm liên tục của $f(x)$,
- c) $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$,
- d) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

1.3.2 Kỳ vọng - Phương sai - Hiệp phương sai (Xem [8])

Định nghĩa 1.24. Cho X là một biến ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Kỳ vọng của X là

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega)d\mathbb{P}(\omega) < \infty.$$

Định nghĩa 1.25. Kỳ vọng cho từng loại biến ngẫu nhiên X được định nghĩa như sau

- a) Giả sử biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận hữu hạn các giá trị x_1, x_2, \dots, x_n với các xác suất tương ứng là p_1, p_2, \dots, p_n . Khi đó, kỳ vọng của X , ký hiệu là $\mathbb{E}(X)$, là số xác định bởi biểu thức

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^n x_j p_j.$$

- b) Nếu biến ngẫu nhiên X nhận vô hạn đếm được các giá trị x_1, x_2, \dots với các xác suất tương ứng p_1, p_2, \dots và $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| p_j < \infty$, thì tổng của chuỗi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j p_j$$

được gọi là kỳ vọng của X .

Định nghĩa 1.26. Hai biến ngẫu nhiên $X, Y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ được gọi là độc lập khi và chỉ khi

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B).$$

Định nghĩa 1.27. Cho X, Y là các biến ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mà trong đó các giá trị kỳ vọng xác định. Phương sai hay còn gọi là giá trị phân tán của X , ký hiệu là

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E} [(X - \mathbb{E}X)^2].$$

Độ lệch chuẩn của X là

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$$

Định nghĩa 1.28. Cho X, Y là hai biến ngẫu nhiên trong không gian xác suất $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Giả sử $\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y), \text{Var}(X)$ và $\text{Var}(Y)$ hữu hạn. Hiệp phương sai của X và Y là

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

1.3.3 Luật phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ (Xem [8])

Định nghĩa 1.29. Biến ngẫu nhiên X được gọi là tuân theo luật phân phối chuẩn với tham số μ và σ^2 , ký hiệu là $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu X có hàm mật độ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Biến ngẫu nhiên $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ có kỳ vọng $\mathbb{E}(X) = \mu$ và phương sai $\text{Var}(X) = \sigma^2$.

Định nghĩa 1.30. Ta có các định nghĩa sau

- a) Khi tham số $\mu = 0$ và $\sigma^2 = 1$ thì luật phân phối $N(0, 1)$ được gọi là luật phân phối Gauss.
- b) Hàm mật độ của phân phối Gauss ký hiệu là

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

c) Hàm phân phối tích lũy Gauss ký hiệu là

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

và có tính chất $\phi(-x) = 1 - \phi(x)$.

1.3.4 Không gian hàm của các biến ngẫu nhiên (Xem [43])

Định nghĩa 1.31. Cho không gian xác suất đo được Ω . Không gian Bochner được định nghĩa là

$$L^2(\Omega, L^2(D)) = \left\{ v : \Omega \rightarrow L^2(D) \text{ đo được và } \mathbb{E} \|v\|_{L^2(D)}^2 < \infty \right\},$$

và

$$\|v\|_{L^2(\Omega, L^2(D))} = \sqrt{\mathbb{E} \|v\|_{L^2(D)}^2}.$$

Định nghĩa 1.32. Ta định nghĩa các không gian định chuẩn

$$i) V_T = \left\{ v : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega, L^2(D)) \text{ đo được và } \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\mathbb{E} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(D)}^2} < \infty \right\},$$

với chuẩn

$$\|v\|_{V_T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\mathbb{E} \|v(\cdot, t)\|_{L^2(D)}^2}.$$

$$ii) V = \left\{ v : [0, 1] \rightarrow L^2(\Omega, L^2(D)) \text{ đo được và } \sup_{0 \leq y \leq 1} \sqrt{\mathbb{E} \|v(\cdot, y)\|_{L^2(D)}^2} < \infty \right\},$$

với chuẩn

$$\|v\|_V = \sup_{0 \leq y \leq 1} \sqrt{\mathbb{E} \|v(\cdot, y)\|_{L^2(D)}^2}.$$

1.4 Bài toán ngược trong thống kê

1.4.1 Bài toán không chỉnh (Xem [28])

Định nghĩa 1.33 (Tính chỉnh). Cho X và Y là các không gian định chuẩn, $K : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ (có thể tuyến tính hoặc phi tuyến).

Phương trình $Kx = y$ được gọi là chỉnh theo nghĩa Hadamard nếu ba điều kiện sau được thỏa:

1. *Tính tồn tại nghiệm*: Với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
2. *Tính duy nhất*: Với mọi $y \in Y$ thì tồn tại nhiều nhất một $x \in X$ sao cho $Kx = y$.
3. *Tính ổn định nghiệm*: Nghiệm x của bài toán phải phụ thuộc liên tục vào y , nghĩa là với mọi dãy $(x_n) \subset X$ sao cho $Kx_n \rightarrow Kx$ khi $n \rightarrow \infty$ thì $x_n \rightarrow x$.

Bài toán không thỏa ít nhất một trong ba tính chất trên gọi là bài toán không chỉnh.

1.4.2 Bài toán ngược tuyến tính với nhiễu ngẫu nhiên (Xem [14])

Cho H và G là hai không gian Hilbert tách được và $A : H \rightarrow G$ là một toán tử tuyến tính bị chặn. Ta gọi $\text{Ker}(A)$, $R(A)$, và $D(A)$ là không gian nhân, ảnh, và miền xác định của A .

Bài toán ngẫu nhiên là bài toán có dạng:

Cho $Y \in G$, tìm hàm $f \in H$ thỏa mãn phương trình

$$Y = Af + \varepsilon\xi,$$

trong đó

- $\xi \in G$ là sai số ngẫu nhiên sao cho $\|\xi\|_G \leq 1$,
- $\varepsilon > 0$ là cường độ nhiễu.

Sai số ngẫu nhiên là một toán tử tuyến tính bị chặn $\xi : G \rightarrow L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ với $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất.

Với mọi g_j bất kỳ thuộc G , $\langle \xi, g_j \rangle$ là biến ngẫu nhiên thỏa $\mathbb{E}(\langle \xi, g_j \rangle) = 0$.

Định nghĩa 1.34. Cho H là một không gian Hilbert. Sai số trung bình bình phương tích phân (Mean Integrated Squared Error-MISE) là đại lượng đo sự sai khác của ước lượng \hat{u} và hàm chính xác u như sau

$$\text{MISE}(\hat{u}, u) := \mathbb{E} (\|\hat{u} - u\|_H^2),$$

trong đó $\hat{u}, u \in L^2(\Omega; H)$, $\|\cdot\|_H$ là chuẩn tương ứng trong không gian H .

Định nghĩa 1.35. Cho H là một không gian Hilbert. Ta nói rằng ξ là một nhiễu trắng Gauss trong H nếu $\text{Cov}\xi = I$ và các biến ngẫu nhiên được sinh ra đều tuân theo phân phối Gauss, nghĩa là: với mọi $g_j \in H$, các biến ngẫu nhiên $\langle \xi, g_j \rangle$ đều có phân phối chuẩn $\mathcal{N}(0, \|g_j\|^2)$ và $\mathbb{E}(\langle \xi, g_1 \rangle, \langle \xi, g_2 \rangle) = \langle g_1, g_2 \rangle$.

Bổ đề 1.36. Cho ξ là một quá trình nhiễu trắng trong một không gian Hilbert H và $\{\phi_n\}$ là một cơ sở trực chuẩn trong H . Cho ξ_n định nghĩa bởi $\xi_n = \langle \xi, \phi_n \rangle$. Khi đó $\{\xi_n\}$ là một dãy biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối chuẩn tắc.

1.5 Định lý ánh xạ co và một số bất đẳng thức

Định lý 1.37. (Định lý ánh xạ co)(Xem [2]). Cho X là một không gian Banach với chuẩn $\|\cdot\|_X$, M là một tập hợp đóng trong không gian X , ánh xạ $f : M \rightarrow M$ được gọi là ánh xạ co nếu tồn tại $0 < k < 1$ sao cho

$$\|f(x_1) - f(x_2)\|_X \leq k \|x_1 - x_2\|_X,$$

với mọi x_1, x_2 trong M . Khi đó, tồn tại duy nhất một điểm bất động của f , nghĩa là có duy nhất phần tử $x_0 \in M$ sao cho $f(x_0) = x_0$.

Bổ đề 1.38. (Bất đẳng thức Hölder)(Xem [3]). Cho f, g đo được trên một tập đo được $I \subset \mathbb{R}^k$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$. Nếu $f \in L^p(I)$, $g \in$

$L^q(I)$ thì

$$\int_I |fg| dx \leq \left(\int_I |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_I |g|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

hay

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

Bổ đề 1.39. (Bất đẳng thức Grönwall) (Xem [7]). Cho $f(t)$ là hàm không âm, liên tục trên $[0, T]$. Nếu

$$f(t) \leq b + k \int_t^T f(s) ds,$$

với $k, b > 0$ thì

$$f(t) \leq be^{k(T-t)}.$$

Bổ đề 1.40. (Xem [50]) Cho $z \in [0, 1], x > 0$, ta có các bất đẳng thức sau

- i) $\cosh(zx) \leq e^{zx}$,
- ii) $\frac{\sinh(zx)}{x} \leq e^{zx}$.

Chương 2

BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN

2.1 Giới thiệu bài toán

Trong chương hai, chúng tôi khảo sát bài toán tìm phân bố nhiệt $u(x, t)$ thỏa mãn phương trình khuếch tán phi tuyến sau

$$u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t, u(x, t)), \quad (x, t) \in D \times (0, T), \quad (2.1)$$

với các điều kiện

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.2)$$

$$u(x, T) = g(x), \quad x \in D, \quad (2.3)$$

trong đó $D = (0, \pi)$, $T > 0$ là thời điểm cuối, $a(t)$ là hệ số khuếch tán phụ thuộc thời gian, $g(x)$ là dữ liệu cuối, $f(x, t, u)$ là nguồn nhiệt phi tuyến và $(-\Delta)^\alpha$ ($\alpha \in (0, 1)$) là toán tử Laplace bậc không nguyên.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán trên trong trường hợp dữ liệu thỏa mãn

mô hình

$$g_\varepsilon(x) = g(x) + \varepsilon\xi(x), \quad (2.4)$$

trong đó $\varepsilon > 0$ là cường độ nhiễu và ξ là một nhiễu trắng Gauss.

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle = \langle g, \phi_n \rangle + \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle, \quad (2.5)$$

với $n = \overline{1, N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$.

Nội dung chủ yếu của chương hai gồm ba phần. Trong tiểu mục 2.2, chúng tôi sẽ thiết lập dạng nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) và đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán. Trong tiểu mục 2.3, chúng tôi chỉnh hóa bài toán bằng phương pháp Fourier và đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác. Trong tiểu mục 2.4, chúng tôi đưa ra một ví dụ số để minh họa cho phân lý thuyết.

Kết quả của chương hai đã được công bố trong bài báo

[A1] Pham Hoang Quan, Nguyen Quang Huy, Le Minh Triet, Luu Hong Phong, *The backward problem for the nonlinear space-fractional diffusion equation with Gaussian white noise*, Kyungpook Mathematical Journal 2025; 65(4); 639-667.

2.2 Dạng nghiệm của bài toán (2.1)-(2.3) và chứng minh tính không chỉnh

Từ đây trở đi, ta ký hiệu $\|\cdot\|$ thay cho chuẩn $\|\cdot\|_{L^2(D)}$.

Trong chương hai, ta cần một số giả thiết sau

(H1): $a(t)$ là hàm liên tục sao cho $0 < p \leq a(t) \leq q, \forall t \in [0, T]$.

(H2): Hàm số $g(x)$ thuộc $L^2(D)$.

(H3): Hàm nguồn $f : [0, \pi] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x, t, u) - f(x, t, v)| \leq K|u - v|,$$

với $K > 0$ độc lập với x, t, u, v .

Dạng nghiệm của bài toán

Định lý 2.1. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa. Nếu bài toán (2.1) - (2.3) có nghiệm trong $C([0, T]; L^2(D))$ thì nghiệm của bài toán được cho bởi*

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right] \sin(nx), \quad (2.6)$$

trong đó

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

$$f_n(u)(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x, s, u(x, s)) \sin(nx) dx,$$

$$F(t) = \int_0^t a(s) ds.$$

Chứng minh.

Giả sử nghiệm của bài toán (2.1) - (2.3) có dạng $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nx)$, trong đó $u_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x, t) \sin(nx) dx$. Bằng cách nhân hai vế của phương trình (2.1) với $\sin(nx)$ và lấy tích phân theo biến x trên miền D , ta có

$$\frac{d}{dt} u_n(t) + a(t) n^{2\alpha} u_n(t) = f_n(u)(t). \quad (2.7)$$

Nhân hai vế của phương trình (2.7) với $e^{n^{2\alpha}F(t)}$ và lấy tích phân từ t đến T , ta nhận được

$$\int_t^T (e^{n^{2\alpha}F(s)} u_n(s))' ds = \int_t^T e^{n^{2\alpha}F(s)} f_n(u)(s) ds.$$

Khi đó

$$e^{n^{2\alpha}F(T)}u_n(T) - e^{n^{2\alpha}F(t)}u_n(t) = \int_t^T e^{n^{2\alpha}F(s)}f_n(u)(s)ds.$$

Biến đổi phương trình trên, ta tìm được

$$u_n(t) = e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}f_n(u)(s)ds.$$

Cuối cùng, nghiệm chính xác của bài toán (2.1) - (2.3) thỏa mãn

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}f_n(u)(s)ds \right] \sin(nx).$$

Định lý 2.1 đã được chứng minh. ■

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một ví dụ để chứng minh tính không chỉnh của bài toán (2.1) - (2.3) với dữ liệu thỏa mãn mô hình nhiễu trắng Gauss (2.4).

Xét bài toán tìm $u(x, t)$ thỏa mãn

$$u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t, u), (x, t) \in (0, \pi) \times (0, T), \quad (2.8)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \in [0, T], \quad (2.9)$$

$$u(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (2.10)$$

trong đó

$$\begin{aligned} g &\in L^2(0, \pi), \\ \phi_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \\ f(x, t, u) &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^{2\alpha}qT} \langle u(\cdot, t), \phi_n \rangle \phi_n(x). \end{aligned}$$

Cho $g_{ex} \in L^2(0, \pi)$ và $u_{ex} \in C([0, T]; L^2(0, \pi))$. Nghiệm chính xác của bài toán (2.8) - (2.10) tương ứng với dữ liệu chính xác g_{ex} là

$$u_{ex}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}(g_{ex})_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}f_n(u_{ex})(s)ds \right] \sin(nx), \quad (2.11)$$

Cho $\varepsilon > 0$ là cường độ nhiễu và ξ là nhiễu trắng Gauss, $g_N \in L^2(0, \pi)$, ($N \in \mathbb{N}$) là dữ liệu nhiễu như sau

$$g_N(x) = g_{ex}(x) + \sum_{n=1}^N \varepsilon \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Ta có kỳ vọng của sai số giữa dữ liệu nhiễu và dữ liệu chính xác là

$$\mathbb{E} \|g_N - g_{ex}\|^2 = \varepsilon^2 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N \xi_n^2 \right),$$

trong đó $\xi_n = \langle \xi, \phi_n \rangle$.

Từ $\mathbb{E}(\xi_n^2) = 1$, ta có

$$\mathbb{E} \|g_N - g_{ex}\|^2 = \varepsilon^2 N. \quad (2.12)$$

Nghiệm chính xác của bài toán (2.8) - (2.10) tương ứng với dữ liệu nhiễu g_N là

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} (g_N)_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u_N)(s) ds \right] \sin(nx).$$

Ta có kỳ vọng của sai số của nghiệm là

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} ((g_N)_n - (g_{ex})_n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} (f_n(u_N)(s) - f_n(u_{ex})(s)) ds \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2$, $a, b \in \mathbb{R}$, ta có đánh giá

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} ((g_N)_n - (g_{ex})_n) \right]^2 \right) \\ &\quad - \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} (f_n(u_N)(s) - f_n(u_{ex})(s)) ds \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Đặt

$$I_1 = \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} ((g_N)_n - (g_{ex})_n) \right]^2 \right),$$

$$I_2 = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} (f_n(u_N)(s) - f_n(u_{ex})(s)) ds \right]^2 \right).$$

Trước hết, ta đánh giá I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left(\left[e^{N^{2\alpha}(F(T)-F(t))} ((g_N)_N - (g_{ex})_N) \right]^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{2} e^{2N^{2\alpha}(F(T)-F(t))} \varepsilon^2 \\ &\geq \frac{1}{2} e^{2N^{2\alpha}p(T-t)} \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Tiếp theo, ta đánh giá I_2 .

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_t^T 1^2 ds \right) \left(\int_t^T e^{2n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} (f_n(u_N)(s) - f_n(u_{ex})(s))^2 ds \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\sum_{n=1}^{\infty} T \left(\int_t^T e^{2n^{2\alpha}qT} e^{-2n^{2\alpha}qT} ((u_N)_n(s) - (u_{ex})_n(s))^2 ds \right) \right] \\ &\leq T \int_t^T \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ((u_N)_n(s) - (u_{ex})_n(s))^2 \right) ds \\ &\leq T \int_t^T \sup_{t \leq s \leq T} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, s) - u_{ex}(\cdot, s)\|^2 ds \\ &\leq T^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Kết hợp (2.14), (2.15) và (2.16), ta nhận được

$$\mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2 \geq \frac{1}{2} e^{2N^{2\alpha}p(T-t)} \varepsilon^2 - T^2 \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2.$$

Cho nên

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2 &\geq \sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{2(1+T^2)} e^{2N^{2\alpha}p(T-t)} \varepsilon^2 \\ &\geq \frac{1}{2(1+T^2)} e^{2N^{2\alpha}pT} \varepsilon^2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Ta chọn $N := N(\varepsilon) = \left[\left(\frac{3}{2pT} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right] + 1$, trong đó $[z]$ là phần nguyên của z .

Từ (2.12), ta để ý rằng

$$\mathbb{E} \|g_N - g_{ex}\|^2 \leq \varepsilon^2 \left[\left(\frac{3}{2pT} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}} \right] + \varepsilon^2 \rightarrow 0, \quad (2.18)$$

khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Từ (2.17), ta nhận được

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, t) - u_{ex}(\cdot, t)\|^2 \geq \frac{1}{2(1+T^2)} \frac{1}{\varepsilon^3} \varepsilon^2 \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

khi $\varepsilon \rightarrow 0$.

Từ (2.18) và (2.19), ta kết luận được nghiệm của bài toán (2.8) - (2.10) không ổn định, dẫn đến tính không chỉnh của bài toán.

Trong tiểu mục 2.3, chúng tôi sẽ trình bày một phương pháp chỉnh hóa cho bài toán.

2.3 Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (2.1)-(2.3)

Để hỗ trợ cho việc chứng minh các kết quả chính, chúng tôi sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 2.2. Cho $\varepsilon \in (0, 1)$, $s > 0$ và $g \in H^s(D)$. Cho $g_{N(\varepsilon)} \in L^2(D)$ như sau

$$g_{N(\varepsilon)}(x) = \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 \leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|_{H^s(D)}^2. \quad (2.20)$$

Ở đây N phụ thuộc ε và thỏa mãn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) = +\infty$.

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon - g, \phi_n \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{n>N(\varepsilon)} \langle g, \phi_n \rangle^2 \right) \\ &= \varepsilon^2 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \xi_n^2 \right) + \sum_{n>N(\varepsilon)} n^{-2s} n^{2s} \langle g, \phi_n \rangle^2. \end{aligned}$$

Khi đó

$$\mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 \leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|_{H^s(D)}^2.$$

Bổ đề 2.2 đã được chứng minh. ■

Chúng ta thấy rằng $e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))}$ và $e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))}$ khi n đủ lớn là nguyên nhân gây ra tính không ổn định nghiệm của bài toán ban đầu. Vì thế, để xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định của bài toán, chúng tôi sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier để đưa ra nghiệm chỉnh hóa như sau

$$\begin{aligned} u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(x, t) &= \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} (g_{N(\varepsilon)})_n \right. \\ &\quad \left. - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) ds \right] \sin(nx), \quad (2.21) \end{aligned}$$

trong đó $B_{N(\varepsilon)}$ là số nguyên dương thỏa mãn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{N(\varepsilon)} = +\infty$.

Định lý 2.3. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Cho $\varepsilon \in (0, 1)$, $s > 0$, $T > 0$ và $g \in H^s(D)$. Cho $N(\varepsilon)$, $g_{N(\varepsilon)}$ như trong Bổ đề 2.2. Khi đó, phương trình tích phân (2.21) có nghiệm duy nhất $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V_T$.*

Chứng minh.

Cho mỗi $u \in V_T$, ta đặt

$$G(u)(x, t) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} (g_{N(\varepsilon)})_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right] \sin(nx).$$

Ta cần chứng minh rằng với mọi $u, v \in V_T, t \in [0, T], i \in \mathbb{N}$ thì

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| G^i(u)(\cdot, t) - G^i(v)(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq K^{2i} \frac{(T-t)^i}{i!} T^i e^{2i(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức trên bằng quy nạp.

Trong trường hợp $i = 1$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G(u)(\cdot, t) - G(v)(\cdot, t)\|^2 \\ & = \frac{\pi}{2} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} |f_n(u)(s) - f_n(v)(s)| ds \right]^2 \right) \\ & \leq \frac{\pi}{2} (T-t) e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(T)} \int_t^T \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(u)(s) - f_n(v)(s)|^2 \right) ds \\ & = (T-t) e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(T)} \int_t^T \mathbb{E} \|f(\cdot, s, u(\cdot, s)) - f(\cdot, s, v(\cdot, s))\|^2 ds \\ & \leq K^2 (T-t) e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(T)} \int_t^T \sup_{t \leq s \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|^2 ds \\ & \leq K^2 T (T-t) e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2. \end{aligned}$$

Do đó, (2.22) thỏa với $i = 1$. Giả sử rằng (2.22) thỏa với $i = k$, ta cần chứng minh (2.22) thỏa với $i = k + 1$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| G^{k+1}(u)(\cdot, t) - G^{k+1}(v)(\cdot, t) \right\|^2 \\ & = \frac{\pi}{2} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} |f_n(G^k(u))(s) - f_n(G^k(v))(s)| ds \right]^2 \right) \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G^{k+1}(u)(\cdot, t) - G^{k+1}(v)(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq \frac{\pi}{2}(T-t)e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \int_t^T \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(G^k(u))(s) - f_n(G^k(v))(s) \right|^2 \right) ds \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G^{k+1}(u)(\cdot, t) - G^{k+1}(v)(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq (T-t)e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \int_t^T \mathbb{E} \|f(\cdot, s, G^k(u))(\cdot, s) - f(\cdot, s, G^k(v))(\cdot, s)\|^2 ds \\ & \leq K^2(T-t)e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \int_t^T \mathbb{E} \|G^k(u)(\cdot, s) - G^k(v)(\cdot, s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G^{k+1}(u)(\cdot, t) - G^{k+1}(v)(\cdot, t)\|^2 \\ & \leq K^2(T-t)e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \times \\ & \int_t^T K^{2k} \frac{(T-s)^k}{k!} T^k e^{2k(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \sup_{t \leq s \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|^2 ds \\ & \leq K^{2(k+1)}(T-t)T^k e^{2(k+1)(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2 \int_t^T \frac{(T-s)^k}{k!} ds \\ & \leq K^{2(k+1)} \frac{(T-t)^{k+1}}{(k+1)!} T^{k+1} e^{2(k+1)(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có được

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbb{E} \|G^i(u)(\cdot, t) - G^i(v)(\cdot, t)\|^2} \\ & \leq K^i \frac{(T-t)^{i/2}}{(i!)^{1/2}} T^{i/2} e^{i(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\mathbb{E} \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|^2}. \end{aligned}$$

Khi đó, ta nhận được

$$\|G^i(u) - G^i(v)\|_{V_T} \leq K^i \frac{T^i}{(i!)^{1/2}} e^{i(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \|u - v\|_{V_T}.$$

Vì $K^i \frac{T^i}{(i!)^{1/2}} e^{i(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \rightarrow 0$ khi $i \rightarrow \infty$, tồn tại một số nguyên dương i_0 sao cho $K^{i_0} \frac{T^{i_0}}{(i_0!)^{1/2}} e^{i_0(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} < 1$.

Từ đó, ta suy ra được G^{i_0} là một ánh xạ co. Điều này kéo theo rằng phương trình $G^{i_0}(u) = u$ có duy nhất nghiệm $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V_T$.

Thật vậy, ta có $G(G^{i_0}(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)) = G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)$. Do đó $G^{i_0}(G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)) = G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)$.

Do tính duy nhất nghiệm của điểm bất động của G^{i_0} , ta có được $G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon) = u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$, vì vậy phương trình $G(u) = u$ có nghiệm duy nhất $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V_T$.

Định lý 2.3 đã được chứng minh. ■

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chính hóa và nghiệm chính xác dưới các điều kiện khác nhau.

Định lý 2.4. *Giả sử rằng các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \leq M_1$. Gọi u là nghiệm chính xác của bài toán (2.1) - (2.3) và $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ là nghiệm chính hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử tồn tại $P_1 > 0$ sao cho*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)|^2 e^{2n^{2\alpha}F(t)} \leq P_1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.23)$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq P_2 e^{2K^2T(T-t)} \varepsilon^{\frac{4spt}{(2s+1)(p+q)T}}, \quad t \in [0, T], \quad (2.24)$$

trong đó $P_2 = 4(1 + M_1^2 + 5\pi P_1)$.

Chứng minh.

Ta đặt

$$v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(x, t) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) ds \right] \sin(nx).$$

Trước tiên, ta đánh giá $\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left| e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} ((g_{N(\varepsilon)})_n - g_n) \right|^2 \right) \\ & + \pi \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left| \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} (f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s)) ds \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta nhận được

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(T)-F(t))} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| (g_{N(\varepsilon)})_n - g_n \right|^2 \right) \\ & + \pi(T-t) e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \times \\ & \left(\int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) \right|^2 ds \right) \\ & \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(T)-F(t))} \mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 \\ & + 2T e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \times \\ & \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \mathbb{E} \left\| f(\cdot, s, u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) - f(\cdot, s, v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) \right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} \mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 \\ & + 2K^2T \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Grönwall, ta có

$$\begin{aligned} & e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(T)} e^{2K^2T(T-t)} \mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(T)-F(t))} e^{2K^2T(T-t)} \mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2.$$

Từ Bổ đề 2.2, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(T)-F(t))} e^{2K^2T(T-t)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|_{H^s(D)}^2 \right) \\ & \leq 2e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}q(T-t)} e^{2K^2T(T-t)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Tiếp theo, ta đánh giá $\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2$.

Ta có

$$\begin{aligned} & u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \\ & = \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right] \sin(nx) \\ & + \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right] \sin(nx). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, ta có

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & + \pi \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 2\pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{-2n^{2\alpha}F(t)} \left[e^{n^{2\alpha}F(T)} g_n - \int_0^T e^{n^{2\alpha}F(s)} f_n(u)(s) ds \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{-2n^{2\alpha}F(t)} \left[\int_0^t e^{n^{2\alpha}F(s)} \left(\frac{d}{ds} u_n(s) + a(s)n^{2\alpha}u_n(s) \right) ds \right]^2 \\
& + \pi(T-t) \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right)^2 ds \\
& \leq 4e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \|u(\cdot, 0)\|^2 + 2\pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{-2n^{2\alpha}F(t)} \left| u_n(t)e^{n^{2\alpha}F(t)} - u_n(0) \right|^2 \\
& + 2(T-t) \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left\| f(\cdot, s, v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) - f(\cdot, s, u(\cdot, s)) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned}
& \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2\pi e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(0)|^2 \\
& + 4\pi e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \sum_{n=1}^{\infty} \left[|u_n(t)|^2 e^{2n^{2\alpha}F(t)} + |u_n(0)|^2 \right] \\
& + 2K^2T e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds \\
& \leq 6\pi e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} P_1 + 4\pi e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n(t)|^2 e^{2n^{2\alpha}F(t)} \\
& + 2K^2T e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\begin{aligned}
& e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 10\pi P_1 + 2K^2T \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Grönwall, ta được

$$e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 10\pi P_1 e^{2K^2T(T-t)}.$$

Điều này dẫn đến

$$\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 10\pi P_1 e^{2K^2 T(T-t)} e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} pt}. \quad (2.26)$$

Từ (2.25) và (2.26), ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 2\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 + 2\mathbb{E} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} q(T-t)} e^{2K^2 T(T-t)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right) \\ & \quad + 20\pi P_1 e^{2K^2 T(T-t)} e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} pt}. \end{aligned}$$

Ta đưa ra một lựa chọn cho các tham số chỉnh hóa $N(\varepsilon)$ và $B_{N(\varepsilon)}$ thỏa mãn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{N(\varepsilon)} = \infty,$$

$$\text{và } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} qT} \varepsilon^2 N(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} qT} (N(\varepsilon))^{-2s} = 0.$$

$$\text{Ta chọn } N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}} \text{ và } B_{N(\varepsilon)} = \left(\frac{2s}{(2s+1)T(p+q)} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}}.$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{2K^2 T(T-t)} (1 + M_1^2) \varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} + 28e^{2K^2 T(T-t)} \pi P_1 \varepsilon^{\frac{4spt}{(2s+1)(p+q)T}} \\ & \leq 4e^{2K^2 T(T-t)} (1 + M_1^2 + 5\pi P_1) \varepsilon^{\frac{4spt}{(2s+1)(p+q)T}}. \end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq P_2 e^{2K^2 T(T-t)} \varepsilon^{\frac{4spt}{(2s+1)(p+q)T}},$$

trong đó $P_2 = 4(1 + M_1^2 + 5\pi P_1)$.

Định lý 2.4 đã được chứng minh. ■

Nhận xét 2.5.

Tốc độ hội tụ dạng Hölder của nghiệm xấp xỉ về nghiệm chính xác càng chậm khi t càng gần 0. Đặc biệt, ước lượng sai số tại $t = 0$ là

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \right\|^2 \leq P_2^2 e^{2K^2 T^2}$$

không hội tụ về 0 khi $\varepsilon \rightarrow 0$. Để khắc phục điều này, trong định lý 2.6 tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra đánh giá sai số hội tụ tại $t = 0$.

Định lý 2.6. *Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \leq M_1$. Gọi u là nghiệm chính xác của bài toán (2.1) - (2.3) và $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ là nghiệm chính hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử rằng tồn tại $Q_1 > 0$ sao cho*

$$\|u(\cdot, t)\|_{H^{2\alpha}(D)} \leq Q_1, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó, ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq M_2 e^{2K^2 T(T-t)} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2}, \quad t \in [0, T], \quad (2.27)$$

trong đó $M_2 = 4 \left(1 + M_1^2 + Q_1^2 \left(\frac{2s}{(2s+1)(p+q)T} \right)^{-2} \right)$.

Chứng minh.

Bây giờ, ta ước lượng $\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta được

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} n^{-4\alpha} n^{4\alpha} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & + \pi \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
& \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq \pi(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{4\alpha} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\
& + \pi(T-t) \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right)^2 ds \\
& \leq 2(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} \|u(\cdot, t)\|_{H^{2\alpha}(D)}^2 \\
& + 2(T-t) \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left\| f(\cdot, s, v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) - f(\cdot, s, u(\cdot, s)) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
& e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2Q_1^2(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} + 2K^2T \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Grönwall, ta được

$$e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 2Q_1^2(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}F(t)} e^{2K^2T(T-t)}.$$

Cho nên

$$\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 2Q_1^2(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} e^{2K^2T(T-t)}. \quad (2.28)$$

Từ (2.25) và (2.28), ta được

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 + 2\mathbb{E} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 4e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}q(T-t)} e^{2K^2T(T-t)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{N(\varepsilon)^{2s}} \right) + 4Q_1^2(B_{N(\varepsilon)})^{-4\alpha} e^{2K^2T(T-t)}.
\end{aligned}$$

Ta chọn $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}}$ và $B_{N(\varepsilon)} = \left(\frac{2s}{(2s+1)T(p+q)} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}}$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{2K^2T(T-t)} (1 + M_1^2) \varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} \\ & \quad + 4e^{2K^2T(T-t)} Q_1^2 \left(\frac{2s}{(2s+1)(p+q)T} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Ta có ước lượng

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{2K^2T(T-t)} \left(1 + M_1^2 + Q_1^2 \left(\frac{2s}{(2s+1)(p+q)T} \right)^{-2} \right) \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2}. \end{aligned}$$

Đặt $M_2 = 4 \left(1 + M_1^2 + Q_1^2 \left(\frac{2s}{(2s+1)(p+q)T} \right)^{-2} \right)$, ta được

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq M_2 e^{2K^2T(T-t)} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2}.$$

Định lý 2.6 đã được chứng minh. ■

Nhận xét 2.7.

1. Ta có đánh giá sai số (2.27) tại thời điểm ban đầu $t = 0$ được cho bởi

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \right\|^2 \leq M_2 e^{2K^2T^2} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2}.$$

Đánh giá sai số này hội tụ về 0 khi $\varepsilon \rightarrow 0$ và đây là sự cải tiến so với đánh giá sai số tại $t = 0$ cho trong định lý 2.4.

2. Ngoài ra, ta đề ý rằng đánh giá sai số (2.27) có dạng logarit với mọi $t \in [0, T]$. Điều này là do điều kiện trên nghiệm chính xác chưa đủ mạnh. Vì thế, trong định lý kế tiếp, với một điều kiện mạnh hơn trên nghiệm chính xác, chúng tôi sẽ thiết lập đánh giá sai số có tốc độ hội tụ nhanh hơn với mọi $t \in [0, T]$.

Định lý 2.8. Giả sử các giả thiết (H1) - (H3) được thỏa mãn. Giả sử rằng tồn tại $s > 0$ và $M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(D)} \leq M_1$. Gọi u là nghiệm chính xác của bài toán (2.1) - (2.3) và $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ là nghiệm chính hóa tương ứng với dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$. Giả sử rằng tồn tại $r > 0$ và $Q_2 > 0$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn^{2\alpha}} |u_n(t)|^2 \leq Q_2, \quad \forall t \in [0, T].$$

Khi đó, ta có đánh giá

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq M_3 e^{2K^2 T(T-t)} \left(\varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} + \varepsilon^{\frac{4rs}{(2s+1)T(p+q)}} \right), \quad t \in [0, T], \quad (2.29)$$

trong đó $M_3 = \max\{4(1 + M_1^2), 4Q_2\}$.

Chứng minh.

Ta đánh giá $\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta được

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{-2rn^{2\alpha}} e^{2rn^{2\alpha}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & + \pi \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} & \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq \pi e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn^{2\alpha}} \left[e^{n^{2\alpha}(F(T)-F(t))} g_n - \int_t^T e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & + \pi(T-t) \int_t^T \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right)^2 ds \end{aligned}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}
& \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} Q_2 \\
& + 2(T-t) \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}(F(s)-F(t))} \left\| f(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f(u)(s) \right\|^2 ds \\
& \leq 2e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} Q_2 \\
& + 2K^2 T e^{-2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(t)} \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
& e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2Q_2 e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(t)} \\
& + 2K^2 T \int_t^T e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(s)} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Grönwall, ta được

$$e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(t)} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 2Q_2 e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} F(t)} e^{2K^2 T(T-t)}.$$

Điều này dẫn đến

$$\left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \leq 2Q_2 e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} e^{2K^2 T(T-t)}. \quad (2.30)$$

Kết hợp (2.25) và (2.30), ta có

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 2\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 + 2\mathbb{E} \left\| u(\cdot, t) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) \right\|^2 \\
& \leq 4e^{2(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} q(T-t)} e^{2K^2 T(T-t)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{N(\varepsilon)^{2s}} \right) + 4Q_2 e^{-2r(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}} e^{2K^2 T(T-t)}.
\end{aligned}$$

Ta chọn $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}}$ và $B_{N(\varepsilon)} = \left(\frac{2s}{(2s+1)T(p+q)} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \right)^{\frac{1}{2\alpha}}$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{2K^2T(T-t)}(1 + M_1^2)\varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} + 4Q_2e^{2K^2T(T-t)}\varepsilon^{\frac{4rs}{(2s+1)T(p+q)}}. \end{aligned}$$

Đặt $M_3 = \max\{4(1 + M_1^2), 4Q_2\}$, ta được

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, t) - u(\cdot, t) \right\|^2 \leq M_3e^{2K^2T(T-t)} \left(\varepsilon^{\frac{4s(pT+qt)}{(2s+1)(p+q)T}} + \varepsilon^{\frac{4rs}{(2s+1)T(p+q)}} \right).$$

Định lý 2.8 đã được chứng minh. ■

Nhận xét 2.9.

1. Đánh giá sai số trong (2.29) có tốc độ hội tụ kiểu Hölder với mọi $t \in [0, T]$. Tốc độ hội tụ này trội hơn so với tốc độ hội tụ dạng logarit trong Định lý 2.6. Tuy nhiên, để có được tốc độ hội tụ này, chúng tôi cần điều kiện mạnh hơn trên nghiệm chính xác $u(x, t)$. Điều này có thể xem như là một hạn chế của Định lý trên.
2. Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày một ví dụ để minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp trong lý thuyết.

2.4 Ví dụ minh họa

Chúng tôi xét bài toán tìm $u(x, t)$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u_t(x, t) + a(t)(-\Delta)^\alpha u(x, t) = f(x, t, u), & (x, t) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \in [0, 1], \\ u(x, 1) = g(x), & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad (2.31)$$

trong đó $\alpha = 0.6$, $a(t) = \frac{1}{10}(t + 0.2)$ và

$$f(x, t, u(x, t)) = (4\alpha t^{4\alpha-1} + \frac{t}{10})e^{t^{4\alpha}} \sin(x) + \frac{2}{100}u(x, t),$$

$$g(x) = e \sin(x),$$

$$F(t) = \int_0^t a(s)ds = \frac{1}{10}(0.5t^2 + 0.2t).$$

Nghiệm chính xác của bài toán (2.31) là

$$u_{exact}(x, t) = e^{t^{4\alpha}} \sin(x).$$

Ta chọn các tham số chỉnh hóa

$$N = [N(\varepsilon)] = [\varepsilon^{-\frac{2}{3}}] \text{ và } B_N = [B_{N(\varepsilon)}] = [\ln(\frac{1}{\varepsilon})].$$

Xét dữ liệu nhiễu

$$g_N(x) = e \sin(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^N \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

trong đó $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ và $\langle \xi, \phi_n \rangle$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối Gauss với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1.

Trong phần mềm MATLAB, để khởi tạo bộ số ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, ta sử dụng hàm $randn(\cdot)$.

Từ (2.21), ta có nghiệm chỉnh hóa thỏa

$$u_N^\varepsilon(x, t) = \sum_{n=1}^{B_N} \left[e^{n^{2\alpha}(F(1)-F(t))} (g_N)_n - \int_t^1 e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t))} f_n(u_N^\varepsilon)(s) ds \right] \sin(nx),$$

trong đó

$$(g_N)_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (g_N)(x) \sin(nx) dx,$$

$$f_n(u_N^\varepsilon)(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x, s, u_N^\varepsilon)(s) \sin(nx) dx.$$

Bây giờ, ta chia nhỏ đoạn $[0,1]$ thành 10 đoạn con bởi 11 điểm

$$t_j = \frac{j-1}{10}, j = 1, 2, \dots, 11.$$

Đặt lần lượt $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$.

Cho các giá trị khác nhau của ε , chúng tôi tính toán kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm t_j , ký hiệu bởi $\mathbb{E} \|u_N^\varepsilon(\cdot, t_j) - u_{exact}(\cdot, t_j)\|^2$. Để làm được việc này, chúng tôi lập một mẫu thống kê với kích cỡ mẫu là $M = 100$. Cụ thể, ở lần mô phỏng thứ k ($k = 1, 2, \dots, 100$), ký hiệu $u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, t_j)$ là nghiệm xấp xỉ của $u_{exact}(\cdot, t_j)$. Với mỗi giá trị của ε , để tính toán $u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, t_j)$, chúng tôi sử dụng phép lặp

Picard như sau

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,0}(x, t_j) = 0, \\ u_{\varepsilon,q}(x, t_j) = \sum_{n=1}^{B_N} \left[e^{n^{2\alpha}(F(1)-F(t_j))} (g_N)_n \right. \\ \left. - \int_{t_j}^1 e^{n^{2\alpha}(F(s)-F(t_j))} f_n(u_{\varepsilon,q-1}(x, t_j))(s) ds \right] \sin(nx), \end{cases}$$

với $q = 1, 2, 3, \dots$

Phép lặp được thực hiện và dừng lại tại q_0 khi

$$\|u_{\varepsilon,q_0}(\cdot, t_j) - u_{\varepsilon,q_0-1}(\cdot, t_j)\|^2 \leq 10^{-5}.$$

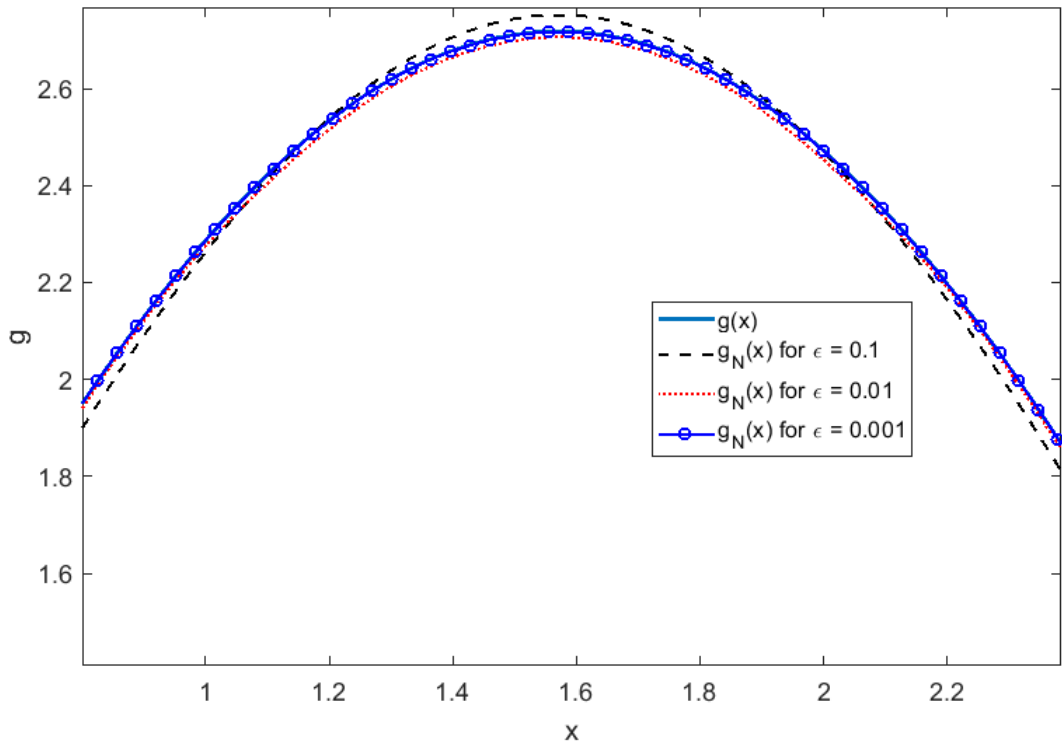
Bây giờ, ta chọn u_{ε,q_0} để xấp xỉ $u_{N,k}^\varepsilon$ và tính kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm $t_j, j = 1, 2, \dots, 11$

$$\mathbb{E} \|u_N^\varepsilon(\cdot, t_j) - u_{exact}(\cdot, t_j)\|^2 \approx \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^M \|u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, t_j) - u_{exact}(\cdot, t_j)\|^2 \right)$$

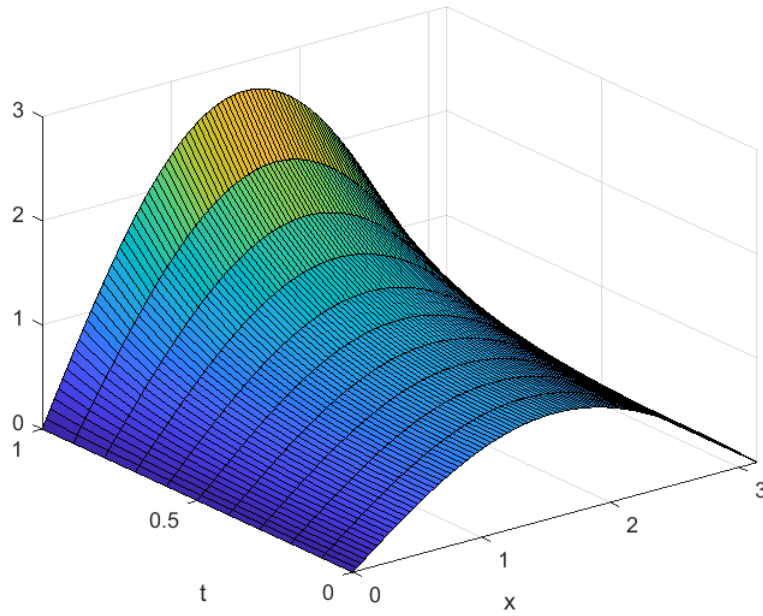
Kết quả tính toán của chúng tôi được mô tả trong Bảng 2.1 và các hình vẽ dưới đây.

$\mathbb{E} \ u_N^\varepsilon(\cdot, t) - u_{exact}(\cdot, t)\ ^2$			
t, ε	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$t = 0$	$3.3278e - 02$	$5.1536e - 03$	$4.4474e - 03$
$t = 0.1$	$3.2502e - 02$	$4.2647e - 03$	$3.5942e - 03$
$t = 0.2$	$3.1817e - 02$	$3.5336e - 03$	$2.8968e - 03$
$t = 0.3$	$3.1175e - 02$	$2.9109e - 03$	$2.3071e - 03$
$t = 0.4$	$3.0561e - 02$	$2.3769e - 03$	$1.8058e - 03$
$t = 0.5$	$2.9961e - 02$	$1.9170e - 03$	$1.3784e - 03$
$t = 0.6$	$2.9365e - 02$	$1.5162e - 03$	$1.0108e - 03$
$t = 0.7$	$2.8765e - 02$	$1.1585e - 03$	$6.8795e - 04$
$t = 0.8$	$2.8154e - 02$	$8.2836e - 04$	$3.9687e - 04$
$t = 0.9$	$2.7555e - 02$	$5.2521e - 04$	$1.4165e - 04$
$t = 1$	$2.7077e - 02$	$3.2072e - 04$	$2.8998e - 06$

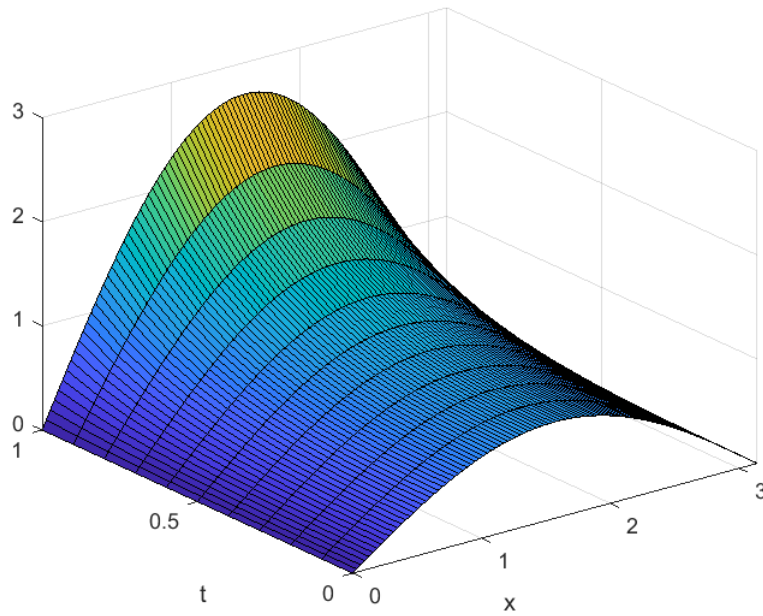
Bảng 2.1. Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(\cdot, t)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(\cdot, t)$ tại các thời điểm khác nhau tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ và $M = 100$.



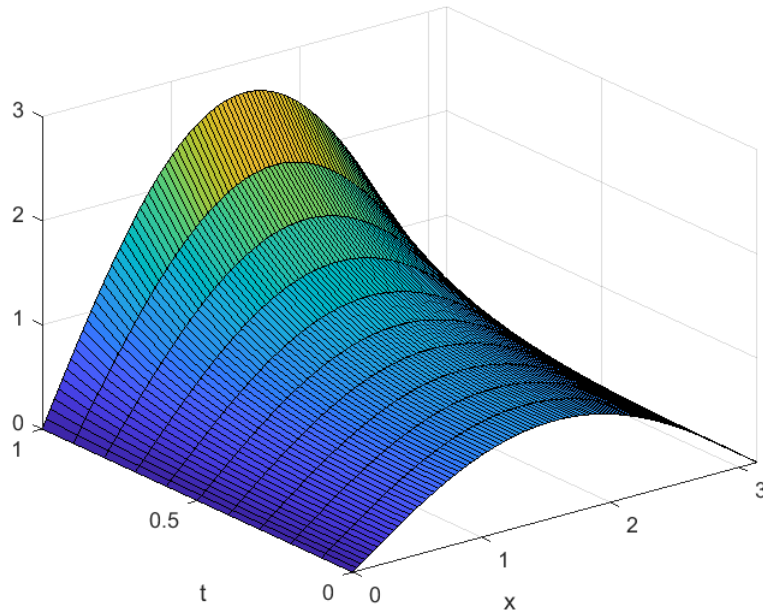
Hình 2.1. Dữ liệu chính xác $g(x)$ và dữ liệu nhiễu $g_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.



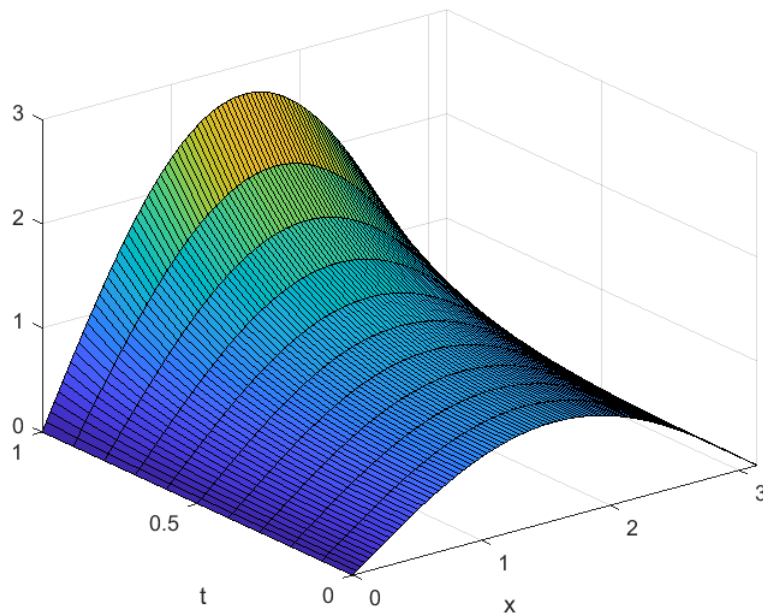
Hình 2.2. Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{exact}(x, t)$.



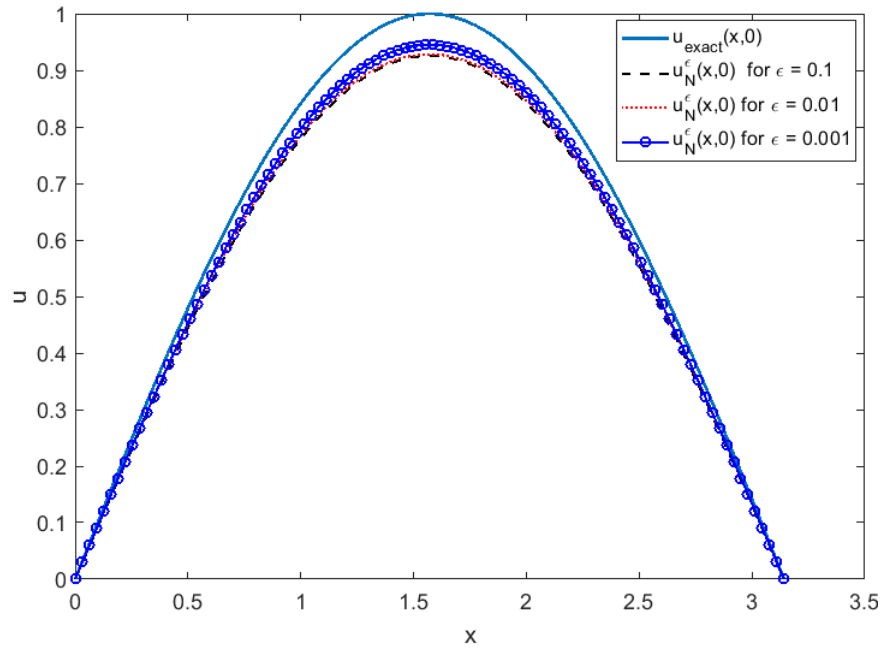
Hình 2.3. Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\epsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\epsilon = 0.1$.



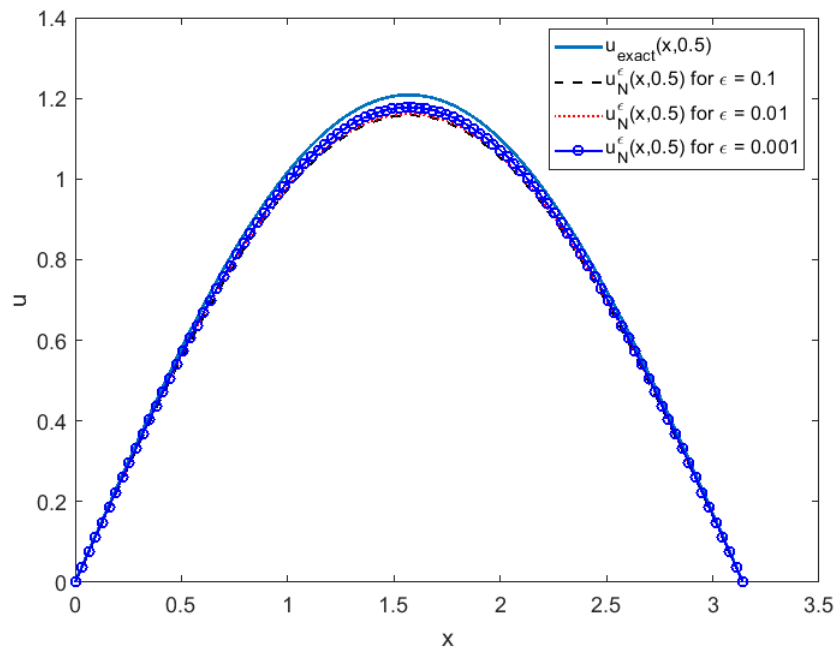
Hình 2.4. Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.01$.



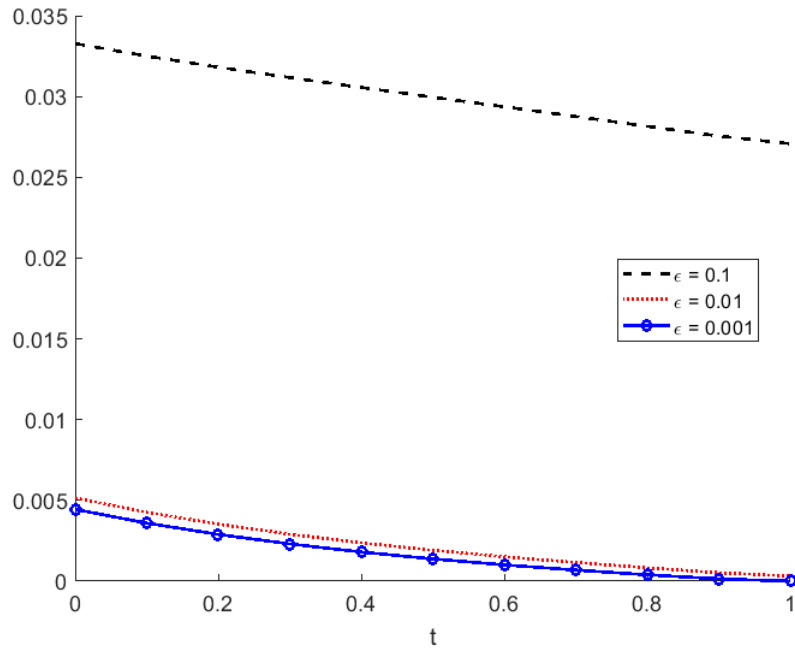
Hình 2.5. Đồ thị của nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(x, t)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.001$.



Hình 2.6. Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{\text{exact}}(x, 0)$ và các nghiệm chỉnh hóa $u_N^\epsilon(x, 0)$.



Hình 2.7. Đồ thị của nghiệm chính xác $u_{\text{exact}}(x, 0.5)$ và các nghiệm chỉnh hóa $u_N^\epsilon(x, 0.5)$.



Hình 2.8. Kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại các thời điểm t khác nhau.

Nhận xét 2.10.

Từ bảng 2.1 và các hình 2.1 - 2.8, ta thấy rằng khi ϵ càng nhỏ, tốc độ hội tụ của nghiệm chỉnh hóa về nghiệm chính xác sẽ càng tốt. Ngoài ra, ta cũng để ý rằng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác giảm theo thời gian t . Các kết quả tính toán trên cho thấy sự tương thích với kết quả lý thuyết, minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp chỉnh hóa.

Chương 3

BÀI TOÁN NGƯỢC CHO PHƯƠNG TRÌNH HELMHOLTZ PHI TUYẾN CHỨA ĐẠO HÀM BẬC KHÔNG NGUYÊN THEO BIẾN KHÔNG GIAN

3.1 Giới thiệu bài toán

Trong chương này, chúng tôi nghiên cứu bài toán tìm hàm biên độ sóng $u(x, y)$ thỏa mãn phương trình Helmholtz phi tuyến sau

$$\Delta u(x, y) - (-\Delta)^\alpha u(x, y) + k^2 u(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, 1) \quad (3.1)$$

với các điều kiện

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (3.2)$$

$$u(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3.3)$$

$$u_y(x, 1) = h(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3.4)$$

trong đó $(-\Delta)^\alpha, \alpha \in (0, 1)$ là toán tử Laplace bậc không nguyên, $k \in (0, \sqrt{2})$ là hệ số sóng cho trước, $f(x, y, u)$ là hàm nguồn phi tuyến. Các hàm số $g(x)$ và $h(x)$ là các dữ liệu tại $y = 1$.

Chúng tôi nghiên cứu bài toán (3.1) - (3.4) trong trường hợp dữ liệu tuân theo quy luật nhiễu trắng Gauss

$$\begin{aligned}g_\varepsilon(x) &= g(x) + \varepsilon\xi(x), \\h_\varepsilon(x) &= h(x) + \varepsilon\xi(x),\end{aligned}\tag{3.5}$$

Trên thực tế, ta chỉ quan sát được một số sai số hữu hạn như sau

$$\begin{aligned}\langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle &= \langle g, \phi_n \rangle + \varepsilon\langle \xi, \phi_n \rangle, \\ \langle h_\varepsilon, \phi_n \rangle &= \langle h, \phi_n \rangle + \varepsilon\langle \xi, \phi_n \rangle,\end{aligned}\tag{3.6}$$

với $n = \overline{1, N}$ trong đó N là số bước quan sát rời rạc và $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$. Nội dung chủ yếu của chương ba gồm ba phần. Trong tiểu mục 3.2, chúng tôi sẽ tìm dạng nghiệm của bài toán và đưa ra ví dụ minh họa cho tính không chỉnh của bài toán. Trong tiểu mục 3.3, chúng tôi chỉnh hóa bài toán bằng phương pháp chặt cụt Fourier và đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác trên các không gian hàm khác nhau. Trong tiểu mục 3.4, chúng tôi đưa ra một ví dụ minh họa cho phần lý thuyết.

Kết quả của chương 3 đã được công bố trong bài báo

[A2] Huy Nguyen Quang, Phong Luu Hong, Quan Pham Hoang, Triet Le Minh, *A backward problem for the nonlinear fractional Helmholtz equation with Gaussian white noise on the measurement*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 37(2025), pages 361-376.

3.2 Dạng nghiệm của bài toán (3.1) - (3.4) và chứng minh tính không chỉnh

Trong chương này, chúng tôi sử dụng một số giả thiết sau
(H4): Các hàm số g và h thuộc $L^2(0, \pi)$.

(H5): Hàm nguồn $f : [0, \pi] \times [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$|f(x, y, u) - f(x, y, v)| \leq K|u - v|,$$

với $K > 0$ độc lập với x, y, u, v .

Trong định lý 3.1 sau, chúng tôi tìm dạng nghiệm của bài toán (3.1) - (3.4)

Dạng nghiệm của bài toán ban đầu

Định lý 3.1. *Giả sử các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Nếu bài toán (3.1) - (3.4) có nghiệm trong $C([0, 1]; L^2(0, \pi))$ thì nghiệm của bài toán được cho bởi*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \cosh((1-y)m_n) - h_n \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right] \phi_n(x), \quad (3.7)$$

trong đó

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), \quad m_n = \sqrt{n^2 + n^{2\alpha} - k^2},$$

$$g_n = \langle g, \phi_n \rangle, \quad h_n = \langle h, \phi_n \rangle, \quad f_n(u)(s) = \langle f(\cdot, s, u(\cdot, s)), \phi_n \rangle.$$

Chứng minh.

Giả sử nghiệm của bài toán (3.1) - (3.4) có dạng

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(y) \phi_n(x),$$

trong đó $u_n(y) = \langle u(\cdot, y), \phi_n \rangle$.

Nhân hai vế của phương trình (3.1) với $\phi_n(x)$ và lấy tích phân theo biến x trên miền $(0, \pi)$, ta được

$$u_n''(y) - (n^2 + n^{2\alpha} - k^2) u_n(y) = f_n(u)(y). \quad (3.8)$$

Sử dụng các điều kiện $u_n(1) = g_n$ và $u'_n(1) = h_n$, ta tìm được nghiệm của phương trình (3.8) là

$$u_n(y) = g_n \cosh((1-y)m_n) - h_n \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds. \quad (3.9)$$

Điều đó kéo theo rằng

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \cosh((1-y)m_n) - h_n \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right] \phi_n(x). \quad (3.10)$$

Định lý 3.1 đã được chứng minh. ■

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra một ví dụ để minh họa cho tính không chỉnh của bài toán (3.1) - (3.4) với dữ liệu thỏa mãn mô hình nhiễu trắng Gauss (3.5).

Ví dụ cho tính không chỉnh của bài toán ban đầu với nhiễu trắng Gauss

Xét bài toán tìm hàm số $u(x, y)$ thỏa mãn

$$\Delta u - (-\Delta)^\alpha u + k^2 u(x, y) = f(x, y, u), \quad (x, y) \in (0, \pi) \times [0, 1], \quad (3.11)$$

$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \in [0, 1], \quad (3.12)$$

$$u(x, 1) = g(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3.13)$$

$$u_y(x, 1) = h(x), \quad x \in (0, \pi), \quad (3.14)$$

trong đó

$$g, h \in L^2(0, \pi), \phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx), f(x, y, u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{(y-2)m_n}}{2} \langle u(\cdot, y), \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Cho $u_{ex} \in C([0, 1]; L^2(0, \pi))$. Nghiệm chính xác của bài toán (3.11) - (3.14) tương ứng với các dữ liệu chính xác g và h là

$$u_{ex}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[g_n \cosh((1-y)m_n) - h_n \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u_{ex})(s) ds \right] \phi_n(x). \quad (3.15)$$

Cho ξ là nhiễu trắng Gauss, $g_N, h_N \in L^2(0, \pi)$, ($N \in \mathbb{N}$) là các dữ liệu nhiễu có dạng

$$g_N(x) = g(x) + \frac{1}{N^{\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^N \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

$$h_N(x) = h(x) + \frac{1}{4N^{\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^N \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x).$$

Ta có

$$\mathbb{E} \|g_N - g\|^2 = \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N \xi_n^2 \right),$$

$$\mathbb{E} \|h_N - h\|^2 = \frac{1}{16N^{\frac{3}{2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^N \xi_n^2 \right),$$

trong đó $\xi_n = \langle \xi, \phi_n \rangle$.

Từ đó, ta có

$$\mathbb{E} \|g_N - g\|^2 = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mathbb{E} \|h_N - h\|^2 = \frac{1}{16N^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.16)$$

Cho $u_N \in C([0, 1]; L^2(0, \pi))$. Nghiệm chính xác của bài toán (3.11) - (3.14) tương ứng với các dữ liệu nhiễu g_N và h_N là

$$u_N(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(g_N)_n \cosh((1-y)m_n) - (h_N)_n \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u_N)(s) ds \right] \phi_n(x). \quad (3.17)$$

Từ (3.15) và (3.17), ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 \\ &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left[\cosh((1-y)m_n)((g_N)_n - g_n) - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}((h_N)_n - h_n) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} (f_n(u_N)(s) - f_n(u_{ex})(s)) ds \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Ta được

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 \\ & \geq \mathbb{E} \left(\left[\cosh((1-y)m_N)((g_N)_N - g_N) - \frac{\sinh((1-y)m_N)}{m_N}((h_N)_N - h_N) \right. \right. \\ & \left. \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_N)}{m_N} (f_N(u_N)(s) - f_N(u_{ex})(s)) ds \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b + c)^2 \geq \frac{1}{2}a^2 - b^2 - c^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta được

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 & \geq \frac{1}{2} \mathbb{E} [\cosh((1-y)m_N)((g_N)_N - g_N)]^2 \\ & \quad - \mathbb{E} \left[\frac{\sinh((1-y)m_N)}{m_N}((h_N)_N - h_N) \right]^2 \\ & \quad - \mathbb{E} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_N)}{m_N} (f_N(u_N)(s) - f_N(u_{ex})(s)) ds \right]^2. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ta đặt

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2} \mathbb{E} [\cosh((1-y)m_N)((g_N)_N - g_N)]^2, \\ I_2 &= \mathbb{E} \left[\frac{\sinh((1-y)m_N)}{m_N}((h_N)_N - h_N) \right]^2, \\ I_3 &= \mathbb{E} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_N)}{m_N} (f_N(u_N)(s) - f_N(u_{ex})(s)) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Đầu tiên, ta đánh giá I_1 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2N^{\frac{3}{2}}} \cosh^2((1-y)m_N) \mathbb{E}(\xi_p^2) \\ &\geq \frac{1}{8} \frac{e^{2(1-y)m_N}}{N^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Tiếp theo, ta đánh giá I_2 . Sử dụng Bổ đề 1.40, ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{16N^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\sinh((1-y)m_N)}{m_N} \right)^2 \mathbb{E}(\xi_p^2) \\ &\leq \frac{1}{16} \frac{e^{2(1-y)m_N}}{N^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Cuối cùng, ta đánh giá I_3 .

Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Bổ đề 1.40, ta được

$$\begin{aligned} &I_3 \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\int_y^1 1^2 ds \right) \left(\int_y^1 \frac{\sinh^2((s-y)m_N)}{(m_N)^2} \langle f(\cdot, s, u_N(\cdot, s)) - f(\cdot, s, u_{ex}(\cdot, s)), \phi_N \rangle^2 ds \right) \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\left(\int_y^1 1^2 ds \right) \left(\int_y^1 e^{2(1-y)m_N} \frac{1}{4} e^{2(s-2)m_N} \langle u_N(\cdot, s) - u_{ex}(\cdot, s), \phi_N \rangle^2 ds \right) \right] \\ &\leq \frac{1}{4} \int_y^1 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle u_N(\cdot, s) - u_{ex}(\cdot, s), \phi_n \rangle^2 \right) ds \\ &\leq \frac{1}{4} \int_y^1 \sup_{y \leq s \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, s) - u_{ex}(\cdot, s)\|^2 ds \\ &\leq \frac{1}{4} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Kết hợp (3.18), (3.19), (3.20) và (3.21), ta có

$$\mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 \geq \frac{1}{16} \frac{e^{2(1-y)m_N}}{N^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2. \quad (3.22)$$

Điều này dẫn đến

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 \geq \frac{1}{16} \frac{e^{2m_N}}{p^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{4} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2. \quad (3.23)$$

Từ (3.23), ta có

$$\sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u_N(\cdot, y) - u_{ex}(\cdot, y)\|^2 \geq \frac{1}{20} \frac{e^{2\sqrt{N^2 + N^{2\alpha} - k^2}}}{N^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

khi $p \rightarrow \infty$.

Mặt khác, từ (3.16), ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|g_N - g\|^2 &= 0, \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \|h_N - h\|^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Từ (3.24) và (3.25), ta kết luận được nghiệm của bài toán (3.11) - (3.14) không ổn định. Vì vậy, bài toán là không chỉnh.

Trong phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày một phương pháp chỉnh hóa cho bài toán.

3.3 Phương pháp chỉnh hóa chặt cụt Fourier cho bài toán (3.1)-(3.4)

Để hỗ trợ cho việc chứng minh các định lý chính, chúng tôi cần sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 3.2. Cho $\varepsilon \in (0, 1)$, $s > 0$ và $g, h \in H^s(0, \pi)$. Cho $g_{N(\varepsilon)}, h_{N(\varepsilon)} \in L^2(0, \pi)$ như dưới đây

$$\begin{aligned} g_{N(\varepsilon)}(x) &= \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x), \\ h_{N(\varepsilon)}(x) &= \sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle h_\varepsilon, \phi_n \rangle \phi_n(x). \end{aligned}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 &\leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|_{H^s(0,\pi)}^2, \\ \mathbb{E} \|h_{N(\varepsilon)} - h\|^2 &\leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|h\|_{H^s(0,\pi)}^2.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Ở đây N phụ thuộc ε và thỏa mãn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} N(\varepsilon) = +\infty$.

Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \langle g_\varepsilon - g, \phi_n \rangle^2 \right) + \mathbb{E} \left(\sum_{n>N(\varepsilon)} \langle g, \phi_n \rangle^2 \right) \\ &= \varepsilon^2 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{N(\varepsilon)} \xi_n^2 \right) + \sum_{n>N(\varepsilon)} n^{-2s} n^{2s} \langle g, \phi_n \rangle^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$\mathbb{E} \|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 \leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|g\|_{H^s(0,\pi)}^2.$$

Chứng minh tương tự, ta được

$$\mathbb{E} \|h_{N(\varepsilon)} - h\|^2 \leq \varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}} \|h\|_{H^s(0,\pi)}^2.$$

Bổ đề 3.2 đã được chứng minh. ■

Ta thấy rằng các số hạng $\cosh((1-y)m_n)$ và $\frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}$ tăng rất nhanh khi n đủ lớn. Do đó chúng là nguyên nhân gây ra tính không ổn định nghiệm của bài toán ban đầu. Vì thế, để xây dựng nghiệm xấp xỉ ổn định của bài toán, chúng tôi sử dụng phương pháp chắt cụt Fourier như dưới đây

$$\begin{aligned}u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(x, y) &= \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\cosh((1-y)m_n) (g_{N(\varepsilon)})_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} (h_{N(\varepsilon)})_n \right. \\ &\quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) ds \right] \phi_n(x),\end{aligned}\quad (3.27)$$

trong đó $B_{N(\varepsilon)}$ là một số nguyên dương thỏa mãn $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{N(\varepsilon)} = +\infty$.

Định lý 3.3. *Giả sử rằng các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Cho $N(\varepsilon)$, $g_{N(\varepsilon)}$, $h_{N(\varepsilon)}$ như trong Bổ đề 3.2. Khi đó phương trình tích phân (3.27) có nghiệm duy nhất $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V$.*

Chứng minh.

Với $u \in V$, ta đặt

$$G(u)(x, y) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\cosh((1-y)m_n)(g_{N(\varepsilon)})_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}(h_{N(\varepsilon)})_n + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right] \phi_n(x).$$

Ta chứng minh rằng: Với mọi $u, v \in V, y \in [0, 1], i \in \mathbb{N}$ thì

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G^i(u)(\cdot, y) - G^i(v)(\cdot, y)\|^2 \\ & \leq K^{2i} \frac{(1-y)^i}{i!} e^{2i\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Trong trường hợp $i = 1$, sử dụng Bổ đề 1.40, ta được

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G(u)(\cdot, y) - G(v)(\cdot, y)\|^2 \\ & = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} |f_n(u)(s) - f_n(v)(s)| ds \right]^2 \right) \\ & \leq \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_y^1 e^{2((s-y)m_n)} |f_n(u)(s) - f_n(v)(s)| ds \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \|G(u)(\cdot, y) - G(v)(\cdot, y)\|^2 \\ & \leq (1-y) e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \int_y^1 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(u)(s) - f_n(v)(s)|^2 \right) ds \\ & = (1-y) e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \int_y^1 \mathbb{E} \|f(\cdot, s, u(\cdot, s)) - f(\cdot, s, v(\cdot, s))\|^2 ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq K^2(1-y)e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \int_y^1 \sup_{y \leq s \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|^2 ds \\
&\leq K^2(1-y)e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2.
\end{aligned}$$

Do đó (3.28) thỏa với $i = 1$. Giả sử rằng (3.28) thỏa với $i = j$, ta chứng minh (3.28) thỏa với $i = j + 1$.

Sử dụng Bổ đề 1.40 và bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \|G^{j+1}(u)(\cdot, y) - G^{j+1}(v)(\cdot, y)\|^2 \\
&= \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} |f_n(G^j(u))(s) - f_n(G^j(v))(s)| ds \right]^2 \right) \\
&\leq (1-y)e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \int_y^1 \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(G^j(u))(s) - f_n(G^j(v))(s)|^2 \right) ds \\
&= (1-y)e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \times \\
&\int_y^1 \mathbb{E} \|f(\cdot, s, G^j(u))(\cdot, s) - f(\cdot, s, G^j(v))(\cdot, s)\|^2 ds \\
&\leq K^2(1-y)e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \int_y^1 \mathbb{E} \|G^j(u)(\cdot, s) - G^j(v)(\cdot, s)\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \|G^{j+1}(u)(\cdot, y) - G^{j+1}(v)(\cdot, y)\|^2 \\
&\leq K^2(1-y)e^{2(j+1)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \times \\
&\int_y^1 K^{2j} \frac{(1-s)^j}{j!} \sup_{y \leq s \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, s) - v(\cdot, s)\|^2 ds \\
&\leq K^{2(j+1)}(1-y)e^{2(j+1)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \times \\
&\sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2 \int_y^1 \frac{(1-s)^j}{j!} ds \\
&\leq K^{2(j+1)} \frac{(1-y)^{j+1}}{(j+1)!} e^{2(j+1)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}} \sup_{0 \leq y \leq 1} \mathbb{E} \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2.
\end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta có

$$\begin{aligned} & \sqrt{\mathbb{E} \|G^i(u)(\cdot, y) - G^i(v)(\cdot, y)\|^2} \\ & \leq K^i \frac{(1-y)^{i/2}}{(i!)^{1/2}} e^{i\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \sup_{0 \leq y \leq 1} \sqrt{\mathbb{E} \|u(\cdot, y) - v(\cdot, y)\|^2}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|G^i(u) - G^i(v)\|_V \leq \frac{K^i}{(i!)^{1/2}} e^{i\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \|u - v\|_V.$$

Vì $\frac{K^i}{(i!)^{1/2}} e^{i\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \rightarrow 0$ khi $i \rightarrow \infty$, tồn tại một số dương i_0 sao cho $\frac{K^{i_0}}{(i_0!)^{1/2}} e^{i_0\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} < 1$. Suy ra G^{i_0} là một ánh xạ co.

Điều này kéo theo rằng phương trình $G^{i_0}(u) = u$ có duy nhất nghiệm $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V$.

Thật vậy, ta có $G(G^{i_0}(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)) = G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)$. Vì thế $G^{i_0}(G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)) = G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)$.

Do tính duy nhất nghiệm của điểm bất động của G^{i_0} , ta có $G(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon) = u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$, phương trình $G(u) = u$ có nghiệm duy nhất $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon \in V$.

Định lý 3.3 đã được chứng minh. ■

Tiếp theo, chúng tôi đưa ra các đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chính hóa và nghiệm chính xác dưới các điều kiện khác nhau.

Định lý 3.4. *Giả sử rằng các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa mãn. Cho $N(\varepsilon), g_{N(\varepsilon)}, h_{N(\varepsilon)}$ như trong Bổ đề 3.2. Giả sử tồn tại $s > 0, M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(0, \pi)} \leq M_1$ và $\|h\|_{H^s(0, \pi)} \leq M_1$. Giả sử u là nghiệm chính xác của bài toán (3.1) - (3.4) và $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ là nghiệm chính hóa tương ứng với các dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$ và $h_{N(\varepsilon)}$.*

i) Nếu với mọi $q > 0$, tồn tại $Q_1 > 0$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} e^{2\gamma n} |u_n(y)|^2 \leq Q_1, \quad \forall y \in [0, 1], \quad (3.29)$$

thì ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \leq 4M_2 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sy}{2s+1}} \right), \quad (3.30)$$

trong đó $M_2 = \max \left\{ 3(1 + M_1^2), Q_1 2^q \left(\frac{2s+1}{s} \right)^{2q} \right\}$.

ii) Nếu với mọi $r > 0$, tồn tại $Q_2 > 0$ sao cho

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn} |u_n(y)|^2 \leq Q_2, \quad \forall y \in [0, 1], \quad (3.31)$$

thì ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \leq 4M_3 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right), \quad (3.32)$$

trong đó $M_3 = \max\{3(1 + M_1^2), Q_2\}$.

Chứng minh. Ta đặt

$$\begin{aligned} v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(x, y) &= \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\cosh((1-y)m_n) g_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} h_n \right. \\ &\quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) ds \right] \phi_n(x). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, ta được

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \\ &\leq 2\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 + 2\mathbb{E} \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Trước hết, ta đánh giá $\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$, ta có

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\ &\leq 3\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left| \cosh((1-y)m_n) ((g_{N(\varepsilon)})_n - g_n) \right|^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 3\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left| \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} ((h_{N(\varepsilon)})_n - h_n) \right|^2\right) \\
& + 3\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left| \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} (f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s)) ds \right|^2\right).
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Bổ đề 1.40, ta được

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| (g_{N(\varepsilon)})_n - g_n \right|^2 \right) \\
& + 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| (h_{N(\varepsilon)})_n - h_n \right|^2 \right) \\
& + 3(1-y)e^{-2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \times \\
& \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) \right|^2 ds \\
& \leq 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left\| g_{N(\varepsilon)} - g \right\|^2 \\
& + 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left\| h_{N(\varepsilon)} - h \right\|^2 \\
& + 3e^{-2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \times \\
& \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left\| f(\cdot, s, u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) - f(\cdot, s, v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s)) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned}
& e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 3e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \left(\mathbb{E} \left\| g_{N(\varepsilon)} - g \right\|^2 + \mathbb{E} \left\| h_{N(\varepsilon)} - h \right\|^2 \right) \\
& + 3K^2 \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được

$$\begin{aligned} & e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}}\mathbb{E}\left\|u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 3e^{2\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}}\varepsilon^{3K^2(1-y)}\left(\mathbb{E}\|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 + \mathbb{E}\|h_{N(\varepsilon)} - h\|^2\right). \end{aligned}$$

Do đó, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\|u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}}\varepsilon^{3K^2(1-y)}\left(\mathbb{E}\|g_{N(\varepsilon)} - g\|^2 + \mathbb{E}\|h_{N(\varepsilon)} - h\|^2\right). \end{aligned}$$

Từ Bổ đề 3.2, ta được

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left\|u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 3e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}}\varepsilon^{3K^2(1-y)}\left(2\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}}\|g\|_{H^s(0,\pi)}^2\right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(N(\varepsilon))^{2s}}\|h\|_{H^s(0,\pi)}^2\right) \\ & \leq 6e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha-k^2}}}\varepsilon^{3K^2(1-y)}\left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}}\right). \quad (3.35) \end{aligned}$$

i) Khi điều kiện (3.29) được thỏa, ta đánh giá $\left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ với $q > 0$, ta được

$$\begin{aligned} & \left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 2 \sum_{n>B_{N(\varepsilon)}} n^{-2q} e^{-2yn} n^{2q} e^{2yn} \left[\cosh((1-y)m_n) g_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} h_n \right. \\ & \quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & \quad + 2 \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Bổ đề 1.40, ta được

$$\begin{aligned}
& \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} \sum_{n=1}^{\infty} n^{2q} e^{2yn} \left[\cosh((1-y)m_n) g_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} h_n \right. \\
& \quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\
& \quad + 2(1-y) \int_y^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(s-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right)^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện (3.29), ta có

$$\begin{aligned}
& \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} Q_1 \\
& \quad + 2(1-y) \int_y^1 e^{2(s-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left\| f(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f(u)(s) \right\|^2 ds \\
& \leq 2(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} Q_1 \\
& \quad + 2K^2 e^{-2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \times \\
& \quad \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left\| v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) - u(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Khi đó ta được

$$\begin{aligned}
& e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} Q_1 e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \\
& \quad + 2K^2 \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Grönwall, ta được

$$\begin{aligned}
& e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2Q_1 (B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha} - k^2}} e^{2K^2(1-y)}.
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \leq 2Q_1(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)}. \quad (3.36)$$

Từ (3.33), (3.34) và (3.35), ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \\ & \leq 12e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right) \\ & \quad + 4Q_1(B_{N(\varepsilon)})^{-2q} e^{-2yB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)}. \end{aligned}$$

Ta chọn $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}}$ và $B_{N(\varepsilon)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)}$.

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \\ & \leq 12e^{\frac{2(1-y)s \ln(\frac{1}{\varepsilon})}{2s+1}} e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^2 \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}} + M_1^2 \varepsilon^{\frac{4s}{2s+1}} \right) \\ & \quad + 4Q_1 \frac{1}{2^{-q}} \left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} e^{\frac{-\sqrt{2}ys \ln(\frac{1}{\varepsilon})}{2s+1}} e^{2K^2(1-y)} \\ & \leq 12e^{3K^2(1-y)} \varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} (1 + M_1^2) \\ & \quad + 4Q_1 2^q \left(\frac{2s+1}{s} \right)^{2q} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sy}{2s+1}} e^{3K^2(1-y)}. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \\ & \leq 4e^{3K^2(1-y)} \left[3(1 + M_1^2) \varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + Q_1 2^q \left(\frac{2s+1}{s} \right)^{2q} \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sy}{2s+1}} \right]. \end{aligned}$$

Đặt $M_2 = \max \left\{ 3(1 + M_1^2), Q_1 2^q \left(\frac{2s+1}{s} \right)^{2q} \right\}$, ta có đánh giá

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \leq 4M_2 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sy}{2s+1}} \right).$$

ii) Khi điều kiện (3.31) được thỏa, ta đánh giá $\left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2$.

Sử dụng bất đẳng thức $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ với $r > 0$, ta được

$$\begin{aligned} & \left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 2 \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{-2rn} e^{2rn} \left[\cosh((1 - y)m_n)g_n - \frac{\sinh((1 - y)m_n)}{m_n}h_n \right. \\ & \quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s - y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & \quad + 2 \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\int_y^1 \frac{\sinh((s - y)m_n)}{m_n} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right) ds \right]^2. \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Hölder và Bổ đề 1.40, ta có

$$\begin{aligned} & \left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 2e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} \sum_{n=1}^{\infty} e^{2rn} \left[\cosh((1 - y)m_n)g_n - \frac{\sinh((1 - y)m_n)}{m_n}h_n \right. \\ & \quad \left. + \int_y^1 \frac{\sinh((s - y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s) ds \right]^2 \\ & \quad + 2(1 - y) \int_y^1 \sum_{n=1}^{\infty} e^{2(s-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \left(f_n(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f_n(u)(s) \right)^2 ds. \end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện (3.31), ta được

$$\begin{aligned} & \left\|u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|^2 \\ & \leq 2e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} Q_2 \\ & \quad + 2(1 - y) \int_y^1 e^{2(s-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \left\|f(v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon)(s) - f(u)(s)\right\|^2 ds \\ & \leq 2e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} Q_2 \\ & \quad + 2K^2 e^{-2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \times \\ & \quad \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} \left\|v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) - u(\cdot, s)\right\|^2 ds. \end{aligned}$$

Cho nên

$$\begin{aligned}
& e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} Q_2 e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} \\
& + 2K^2 \int_y^1 e^{2s\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} \left\| u(\cdot, s) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, s) \right\|^2 ds.
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức Grönwall, ta được

$$\begin{aligned}
& e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} \left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 2Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} e^{2y\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} e^{2K^2(1-y)}.
\end{aligned}$$

Điều này kéo theo

$$\left\| u(\cdot, y) - v_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|^2 \leq 2Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)}. \quad (3.37)$$

Từ (3.34), (3.35) và (3.37), ta được

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \\
& \leq 12e^{2(1-y)\sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2+(B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha}-k^2}} e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right) \\
& + 4Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)}. \quad (3.38)
\end{aligned}$$

Nếu chọn $N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}}$ và $B_{N(\varepsilon)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)}$ thì ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \leq 4e^{3K^2(1-y)} \left[3(1 + M_1^2) \varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + Q_2 \varepsilon^{\frac{\sqrt{2sr}}{2s+1}} \right].$$

Đặt $M_3 = \max \{3(1 + M_1^2), Q_2\}$, ta có đánh giá

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2 \leq 4M_3 e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2sr}}{2s+1}} \right).$$

Định lý 3.4 đã được chứng minh. ■

Nhận xét 3.5.

1. Đánh giá sai số (3.30) tại $y = 0$ được cho bởi

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, 0) - u(\cdot, 0) \right\|^2 \leq 2M_2 e^{3K^2} \left(\varepsilon^{\frac{2s}{2s+1}} + \left(\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^{-2q} \right).$$

Ta để ý rằng đánh giá sai số này có dạng logarit. Điều này là do điều kiện (3.29) trên nghiệm chính xác chưa đủ mạnh.

2. Đánh giá sai số (3.32) có cấp độ hội tụ kiểu Hölder với mọi $y \in [0, 1]$. Tốc độ hội tụ này trội hơn so với tốc độ hội tụ dạng logarit trong (3.30). Tuy nhiên, để có được tốc độ hội tụ này, chúng tôi cần điều kiện (3.31) mạnh hơn trên nghiệm chính xác $u(x, y)$. Điều này có thể xem như là một hạn chế trong đánh giá sai số trên.

3. Trong định lý 3.6 tiếp theo, chúng tôi sẽ đưa ra đánh giá kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chính hóa và nghiệm chính xác trên $C([0, 1]; H^q(0, \pi))$ với $q > 0$.

Định lý 3.6. *Giả sử các giả thiết (H4) - (H5) được thỏa. Cho $N(\varepsilon)$, $g_{N(\varepsilon)}$, $h_{N(\varepsilon)}$ như trong Bổ đề 3.2. Giả sử rằng tồn tại $s > 0, M_1 > 0$ sao cho $\|g\|_{H^s(0, \pi)} \leq M_1$ và $\|h\|_{H^s(0, \pi)} \leq M_1$. Giả sử u là nghiệm chính xác của bài toán (3.1) - (3.4) và $u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon$ là nghiệm chính hóa tương ứng với các dữ liệu nhiễu $g_{N(\varepsilon)}$ và $h_{N(\varepsilon)}$. Nếu điều kiện (3.31) được thỏa thì với mọi $y \in [0, 1]$,*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ & \leq M_4 \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)^q \left[e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right) + 4\varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

trong đó $M_4 = \frac{1}{2^{q-1}} \max \{12(1 + M_1^2), 4Q_2\}$.

Chứng minh.

Ta đặt

$$w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(x, y) = \sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left[\cosh((1-y)m_n)g_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n}h_n + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u)(s)ds \right] \phi_n(x). \quad (3.40)$$

Sử dụng bất đẳng thức $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ & \leq 2\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 + 2\mathbb{E} \left\| u(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Trước tiên, ta đánh giá $\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2$.

Ta có

$$\mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 = \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} n^{2q} \left\langle u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y), \phi_n \right\rangle^2 \right).$$

Từ đó, ta được

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 & \leq |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} \mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{B_{N(\varepsilon)}} \left\langle u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y), \phi_n \right\rangle^2 \right) \\ & \leq |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Từ (3.38) và (3.42), ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ & \leq 2 |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} \left[12e^{2(1-y)} \sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}} e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right) \right. \\ & \left. + 4Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)} \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Kế tiếp, ta đánh giá $\left\|u(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|_{H^q(0, \pi)}^2$.

Ta xét hàm số

$$G(\omega) = \omega^{2q} e^{-H\omega}, \quad H > 0, \alpha > 0. \quad (3.44)$$

Từ đạo hàm của G là $G'(\omega) = \omega^{2q-1} e^{-H\omega} (2q - H\omega)$, ta thấy rằng G là hàm giảm khi $H\omega > 2q$. Bởi vì $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} B_{N(\varepsilon)} = +\infty$, ta để ý rằng nếu ε đủ nhỏ thì $rB_{N(\varepsilon)} > q$. Thay $H = 2r$, $\omega = B_{N(\varepsilon)}$ vào (3.44), ta có với $n > B_{N(\varepsilon)}$ thì

$$G(n) = n^{2q} e^{-2rn} \leq G(B_{N(\varepsilon)}) = |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} e^{-2rB_{N(\varepsilon)}}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \left\|u(\cdot, y) - w_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y)\right\|_{H^q(0, \pi)}^2 &= \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} n^{2q} \langle u(\cdot, y), \phi_n \rangle^2 \\ &= \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} G(n) e^{2rn} \langle u(\cdot, y), \phi_n \rangle^2 \\ &\leq G(B_{N(\varepsilon)}) \sum_{n > B_{N(\varepsilon)}} e^{2rn} \langle u(\cdot, y), \phi_n \rangle^2 \\ &\leq Q_2 |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} e^{-2rB_{N(\varepsilon)}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Từ (3.41), (3.43) và (3.45), ta có

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left\|u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y)\right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ &\leq 2 |B_{N(\varepsilon)}|^{2q} \left[12 e^{2(1-y) \sqrt{(B_{N(\varepsilon)})^2 + (B_{N(\varepsilon)})^{2\alpha - k^2}}} e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^2 N(\varepsilon) + \frac{M_1^2}{(N(\varepsilon))^{2s}} \right) \right. \\ &\quad \left. + 4Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} e^{2K^2(1-y)} + Q_2 e^{-2rB_{N(\varepsilon)}} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta chọn } N(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2s+1}} \text{ và } B_{N(\varepsilon)} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)}.$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ & \leq \frac{1}{2^{q-1}} \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)^q \left[12e^{3K^2(1-y)} (1 + M_1^2) \varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} \right. \\ & \quad \left. + 4Q_2 e^{2K^2(1-y)} \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} + Q_2 \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right]. \end{aligned}$$

Đặt $M_4 = \frac{1}{2^{q-1}} \max \{12(1 + M_1^2), 4Q_2\}$, ta có

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left\| u_{N(\varepsilon)}^\varepsilon(\cdot, y) - u(\cdot, y) \right\|_{H^q(0, \pi)}^2 \\ & \leq M_4 \left(\left(\frac{s}{2s+1} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + k^2 \right)^q \left[e^{3K^2(1-y)} \left(\varepsilon^{\frac{2s(1+y)}{2s+1}} + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right) + \varepsilon^{\frac{\sqrt{2}sr}{2s+1}} \right], \end{aligned}$$

Định lý 3.6 đã được chứng minh. ■

Nhận xét 3.7. Trong vật lý và kỹ thuật, ước lượng sai số trên không gian thang Hilbert như $H^q(0, \pi)$ rất quan trọng. Hơn nữa, đánh giá sai số trong không gian $H^q(0, \pi)$ sẽ khó khăn hơn trong không gian $L^2(0, \pi)$.

3.4 Ví dụ minh họa

Trong phần này, chúng tôi xét bài toán tìm hàm số $u(x, y)$ thỏa mãn bài toán

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) - (-\Delta)^\alpha u(x, y) + 1.95u(x, y) = f(x, y, u), & (x, y) \in (0, \pi) \times [0, 1], \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0, & y \in [0, 1], \\ u(x, 1) = g(x), & x \in (0, \pi), \\ u_y(x, 1) = h(x), & x \in (0, \pi), \end{cases} \quad (3.46)$$

trong đó $\alpha = \frac{1}{31}$ và

$$f(x, y, u) = \frac{(-64^2 \alpha^2 y^{2(64\alpha-1)} - 0.05) \cos(y^{64\alpha}) \sin(x)}{3} - \frac{64\alpha(64\alpha - 1)y^{64\alpha-2} \sin(y^{64\alpha}) \sin(x)}{3} + u(x, y),$$

$$g(x) = \frac{1}{3} \cos(1) \sin(x),$$

$$h(x) = -\frac{64}{3} \alpha \sin(1) \sin(x).$$

Nghiệm chính xác của bài toán (3.46) là

$$u_{exact}(x, y) = \frac{1}{3} \cos(y^{64\alpha}) \sin(x).$$

Ta chọn các tham số chỉnh hóa là

$$N = [N(\varepsilon)] = [\varepsilon^{-\frac{2}{3}}], \quad B_N = [B_{N(\varepsilon)}] = \left[\sqrt{\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{3} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right)^2 + 1.95 \right)} \right].$$

Xét dữ liệu nhiễu

$$g_N(x) = \frac{1}{3} \cos(1) \sin(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^N \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

$$h_N(x) = -\frac{64}{3} \alpha \sin(1) \sin(x) + \varepsilon \sum_{n=1}^N \langle \xi, \phi_n \rangle \phi_n(x),$$

trong đó $\phi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(nx)$ và $\langle \xi, \phi_n \rangle$ là các biến ngẫu nhiên có phân phối Gauss với trung bình bằng 0 và phương sai bằng 1.

Trong phần mềm MATLAB, để khởi tạo bộ số ngẫu nhiên có phân phối chuẩn, ta sử dụng hàm $randn(\cdot)$.

Từ (3.27), ta có nghiệm chỉnh hóa thỏa mãn

$$u_N^\varepsilon(x, y) = \sum_{n=1}^{B_N} \left[\cosh((1-y)m_n) (g_N)_n - \frac{\sinh((1-y)m_n)}{m_n} (h_N)_n + \int_y^1 \frac{\sinh((s-y)m_n)}{m_n} f_n(u_N^\varepsilon)(s) ds \right] \phi_n(x),$$

trong đó

$$\begin{aligned} m_n &= \sqrt{n^2 + n^{2\alpha} - 1.95}, \\ (g_N)_n &= \langle g_N, \phi_n \rangle, \\ (h_N)_n &= \langle h_N, \phi_n \rangle, \\ f_n(u_N^\varepsilon)(s) &= \langle f(\cdot, s, u_N^\varepsilon(\cdot, s)), \phi_n \rangle. \end{aligned}$$

Bây giờ, ta chia nhỏ đoạn $[0,1]$ thành 10 đoạn con bởi 11 điểm

$$y_j = \frac{j-1}{10}, j = 1, 2, \dots, 11.$$

Đặt lần lượt $\varepsilon = 0.1, \varepsilon = 0.01, \varepsilon = 0.001$.

Cho các giá trị khác nhau của ε , chúng tôi tính toán kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm y_j , ký hiệu bởi $\mathbb{E} \|u_N^\varepsilon(\cdot, y_j) - u_{exact}(\cdot, y_j)\|^2$. Để làm được việc này, chúng tôi lập một mẫu thống kê với kích cỡ mẫu là $M = 100$. Cụ thể, ở lần mô phỏng thứ k ($k = 1, 2, \dots, 100$), ký hiệu $u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, y_j)$ là nghiệm xấp xỉ của $u_{exact}(\cdot, y_j)$. Với mỗi giá trị của ε , để tính toán $u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, y_j)$, chúng tôi sử dụng phép lặp Picard thỏa mãn

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,0}(x, y_j) = 0, \\ u_{\varepsilon,q}(x, y_j) = \sum_{n=1}^{B_N} \left[\cosh((1-y_j)m_n)(g_N)_n - \frac{\sinh((1-y_j)m_n)}{m_n} (h_N)_n \right. \\ \left. - \int_{y_j}^1 \frac{\sinh((s-y_j)m_n)}{m_n} f_n(u_{\varepsilon,q-1}(x, y_j))(s) ds \right] \phi_n(x), \end{cases}$$

với $q = 1, 2, 3, \dots$

Phép lặp được thực hiện và dừng lại tại q_0 khi

$$\|u_{\varepsilon,q_0}(\cdot, y_j) - u_{\varepsilon,q_0-1}(\cdot, y_j)\|^2 \leq 10^{-5}.$$

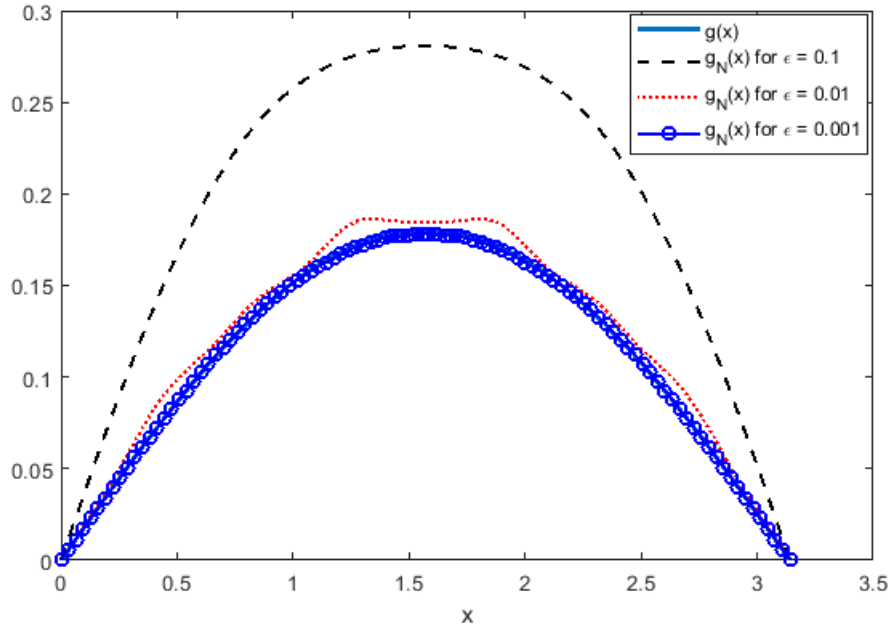
Bây giờ, ta chọn u_{ε,q_0} để xấp xỉ $u_{N,k}^\varepsilon$ và tính kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác tại thời điểm $y_j, j = 1, 2, \dots, 11$

$$\mathbb{E} \|u_N^\varepsilon(\cdot, y_j) - u_{exact}(\cdot, y_j)\|^2 \approx \frac{1}{M} \left(\sum_{k=1}^M \|u_{N,k}^\varepsilon(\cdot, y_j) - u_{exact}(\cdot, y_j)\|^2 \right).$$

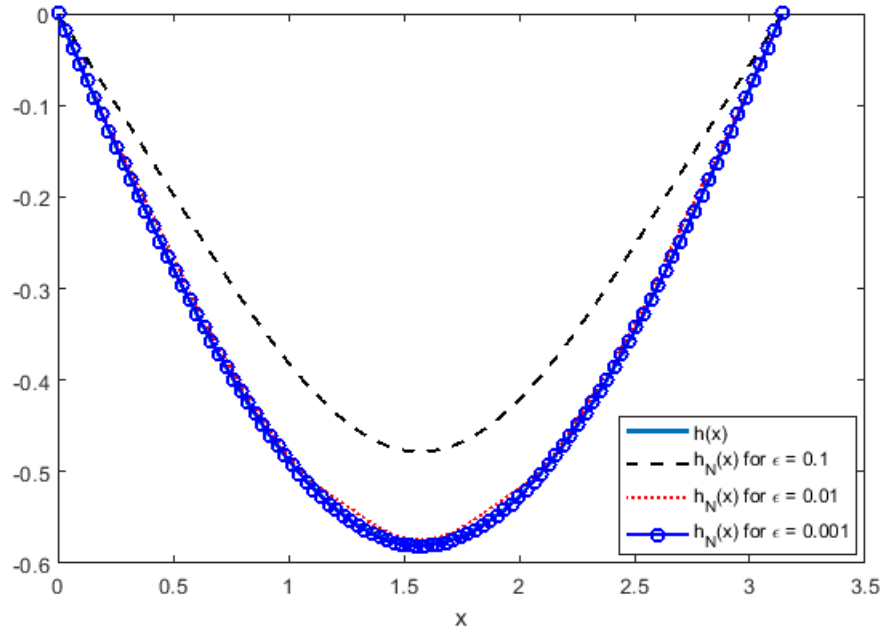
Kết quả tính toán của chúng tôi được mô tả trong Bảng 3.1 và các hình vẽ dưới đây.

y, ε	$\mathbb{E} \ u_N^\varepsilon(\cdot, y) - u_{exact}(\cdot, y)\ ^2$		
	$\varepsilon = 0.1$	$\varepsilon = 0.01$	$\varepsilon = 0.001$
$y = 0$	$3.5015e - 01$	$3.4985e - 01$	$3.4981e - 01$
$y = 0.1$	$3.0594e - 01$	$3.0375e - 01$	$3.0350e - 01$
$y = 0.2$	$2.5604e - 01$	$2.5175e - 01$	$2.5131e - 01$
$y = 0.3$	$1.9912e - 01$	$1.9264e - 01$	$1.9203e - 01$
$y = 0.4$	$1.4316e - 01$	$1.3447e - 01$	$1.3375e - 01$
$y = 0.5$	$9.2952e - 02$	$8.2124e - 02$	$8.1378e - 02$
$y = 0.6$	$5.4837e - 02$	$4.1924e - 02$	$4.1231e - 02$
$y = 0.7$	$3.1304e - 02$	$1.6261e - 02$	$1.5696e - 02$
$y = 0.8$	$2.1468e - 02$	$4.0042e - 03$	$3.6017e - 03$
$y = 0.9$	$2.1099e - 02$	$5.1801e - 04$	$2.5170e - 04$

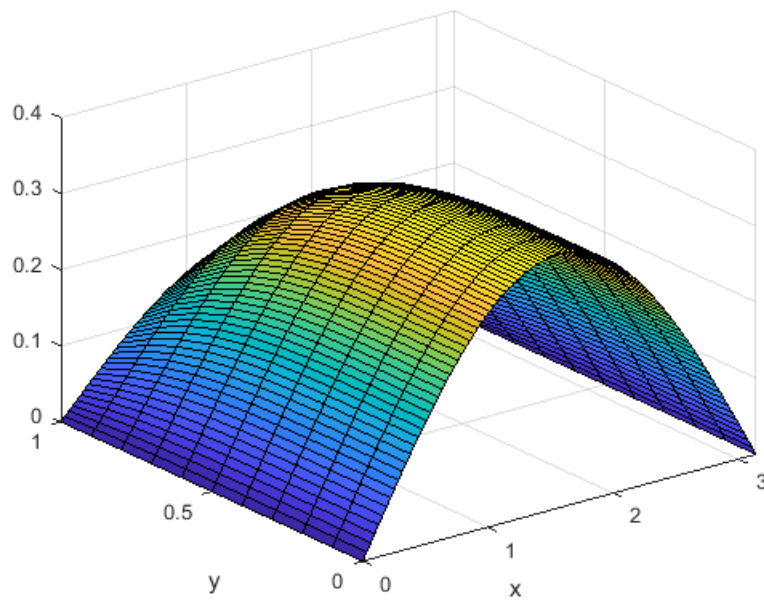
Bảng 3.1. Bảng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa $u_N^\varepsilon(\cdot, y)$ và nghiệm chính xác $u_{exact}(\cdot, y)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$ và $M = 100$.



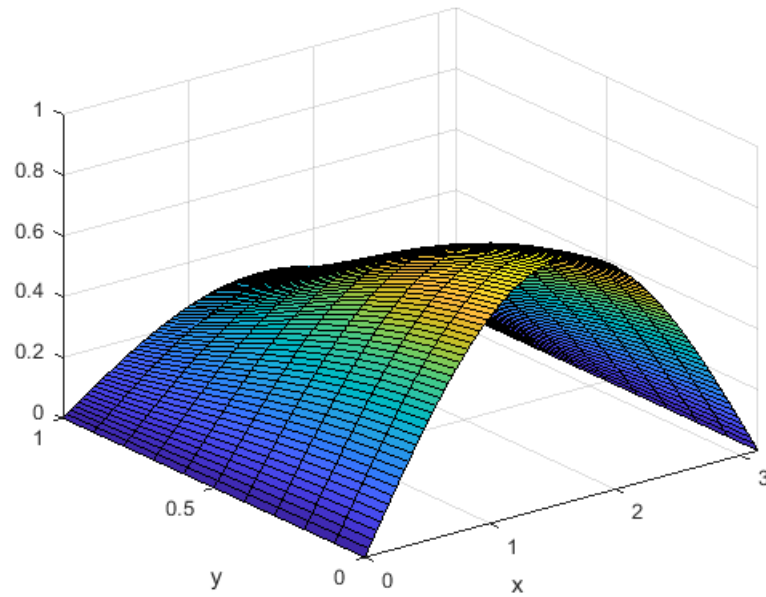
Hình 3.1. Dữ liệu chính xác $g(x)$ và dữ liệu nhiễu $g_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.



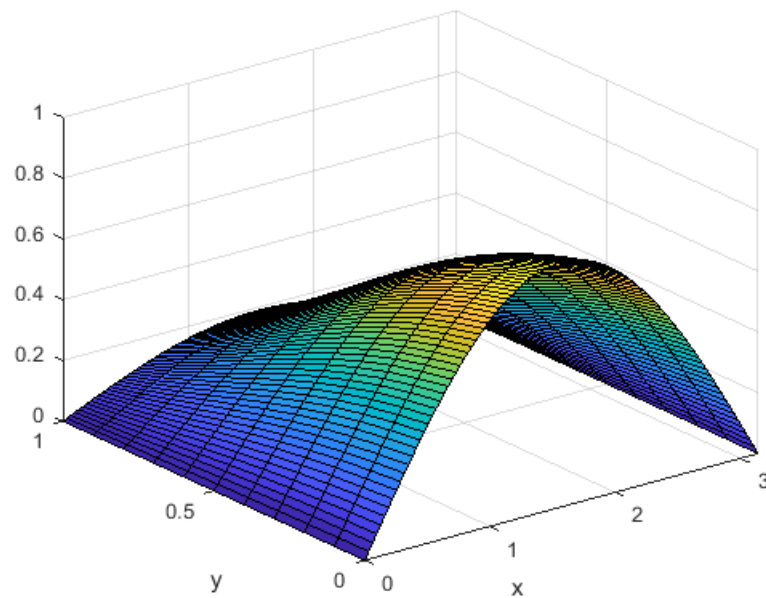
Hình 3.2. Dữ liệu chính xác $h(x)$ và dữ liệu nhiễu $h_N(x)$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.



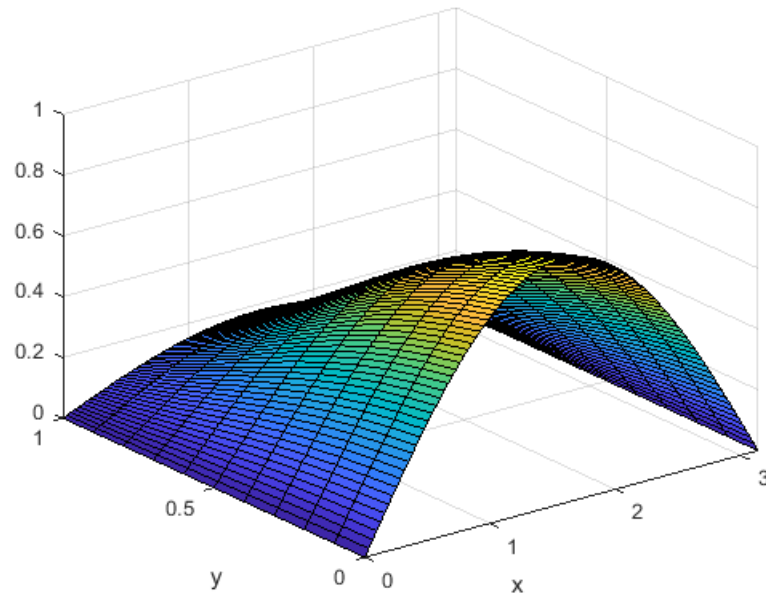
Hình 3.3. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, y)$.



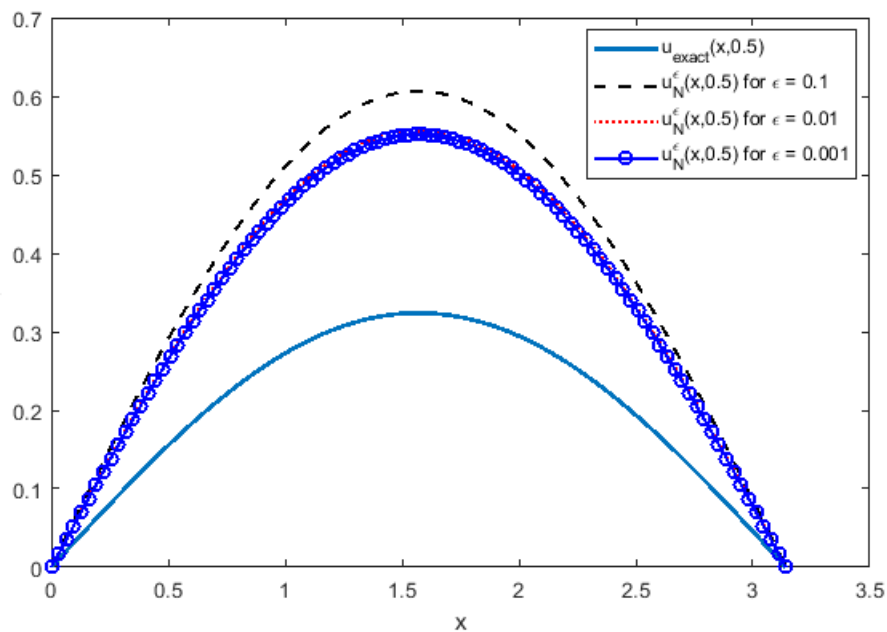
Hình 3.4. Nghiệm chính hóa $u_N^\varepsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.1$.



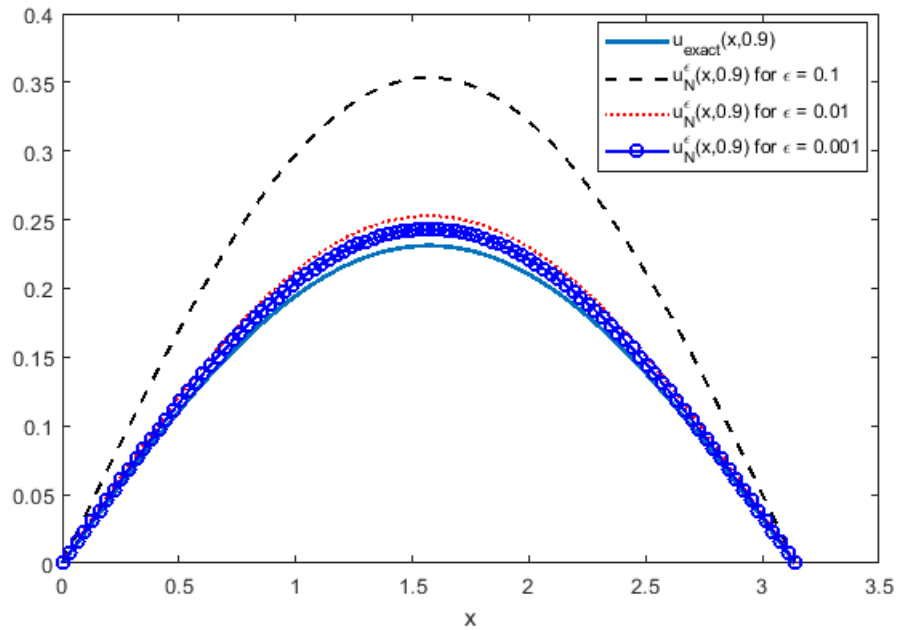
Hình 3.5. Nghiệm chính hóa $u_N^\varepsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\varepsilon = 0.01$.



Hình 3.6. Nghiệm chính hóa $u_N^\epsilon(x, y)$ trong lần mô phỏng thứ $k = 100$ tương ứng với $\epsilon = 0.001$.



Hình 3.7. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0.5)$ và nghiệm chính hóa $u_N^\epsilon(x, 0.5)$ tương ứng với $\epsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.



Hình 3.8. Nghiệm chính xác $u_{exact}(x, 0.9)$ và nghiệm chỉnh hóa $u_N^\epsilon(x, 0.9)$ tương ứng với $\epsilon = 0.1, 0.01, 0.001$.

Nhận xét 3.8.

Từ bảng 3.1 và các hình 3.1 - 3.8, ta thấy rằng khi ϵ càng nhỏ, nghiệm chỉnh hóa xấp xỉ nghiệm chính xác tốt hơn. Ngoài ra, ta cũng để ý rằng kỳ vọng của sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác sẽ giảm theo y . Các kết quả tính toán trên cho thấy sự tương thích với kết quả lý thuyết, minh họa cho tính hiệu quả của phương pháp chỉnh hóa.

KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Trong chương 2, chúng tôi đã khảo sát chỉnh hóa cho bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến với dữ liệu nhiễu trắng Gauss. Bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier, chúng tôi đã thực hiện việc đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chính xác. Đánh giá sai số có tốc độ hội tụ dạng logarit hoặc dạng Hölder. Hơn nữa, chúng tôi còn đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết.

Trong chương 3, chúng tôi đã khảo sát chỉnh hóa cho bài toán ngược cho phương trình Helmholtz phi tuyến với dữ liệu nhiễu trắng Gauss. Với các điều kiện khác nhau trên nghiệm chính xác, chúng tôi đã đưa ra các đánh giá sai số giữa nghiệm chỉnh hóa và nghiệm chính xác bằng cách sử dụng phương pháp chặt cụt Fourier. Đánh giá sai số có tốc độ hội tụ dạng logarit hoặc dạng Hölder. Hơn nữa, chúng tôi còn đưa ra ví dụ số minh họa cho phần lý thuyết.

Kết quả của luận án đã được công bố trong hai bài báo thuộc tạp chí *Wos/Scopus*.

Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ khảo sát các bài toán ngược cho phương trình parabolic phi tuyến và phương trình Helmholtz phi tuyến trong trường hợp hệ số phi tuyến và trong trường hợp hàm nguồn thỏa điều kiện Lipschitz địa phương.

DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ

[A1] Pham Hoang Quan, Nguyen Quang Huy, Le Minh Triet, Luu Hong Phong, *The backward problem for the nonlinear space-fractional diffusion equation with Gaussian white noise*, Kyungpook Mathematical Journal 2025; 65(4); pages 639-667.

[A2] Huy Nguyen Quang, Phong Luu Hong, Quan Pham Hoang, Triet Le Minh, *A backward problem for the nonlinear fractional Helmholtz equation with Gaussian white noise on the measurement*, Journal of Integral Equations and Applications, Volume 37(2025), pages 361-376.

Tài liệu tham khảo

- [1] Đặng Đình Áng, Trần Lưu Cường, Huỳnh Bá Lân, Nguyễn Văn Nhân, Phạm Hoàng Quân; *Biến đổi tích phân*, Nhà xuất bản Giáo Dục Việt Nam, 2007.
- [2] Dương Minh Đức; *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2011.
- [3] Võ Hoàng Hưng; *Giải tích thực*, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2019.
- [4] Nguyễn Đình Phư, *Phương trình vi phân*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2002.
- [5] Mai Đức Thành, *Phương trình vi phân và phương trình đạo hàm riêng*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2016.
- [6] Đặng Đức Trọng; *Bài giảng Giải tích thực*, Trường Đại học Khoa học tự nhiên TP.HCM, 2015.
- [7] Đặng Đức Trọng, Phạm Hoàng Quân, Đặng Hoàng Tâm, Đinh Ngọc Thanh; *Giải tích hàm*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2011.
- [8] Đặng Đức Trọng, Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đăng Minh; *Lý thuyết xác suất*, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP.HCM, 2024.

- [9] G. Acosta and J. P. Borthagaray; *A fractional Laplace Equation: Regularity of Solutions and Finite Element Approximations*, SIAM Journal on Numerical Analysis. 55, 2017, 472-495.
- [10] N. V. S. Avula, M. L. Klein, and S. Balasubramanian; *Understanding the Anomalous Diffusion of Water in Aqueous Electrolytes Using Machine Learned Potentials*, The Journal of Physical Chemistry Letters, 14, 2023, 9500-9507.
- [11] D. Baleanu, H. K. Jassim, and M. A. Qurashi; *Solving Helmholtz equation with local fractional derivative operators*, Fractal and Fractional 3(3), 2019, 12pp.
- [12] S. Biagi, E. Vecchi, S. Dipierro, and E. Valdinoci; *Semilinear elliptic equations involving mixed local and nonlocal operators*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2020, 1-31.
- [13] D. Cassani, L. Vilasi, and Y. J. Wang; *Local versus nonlocal elliptic equations: short - long range field interactions*, Advances in Nonlinear Analysis 10(1), 2021, 895-921.
- [14] L. Cavalier; *Nonparametric statistical inverse problems*, Inverse Problem, 19(24), 034004, 2008, 19pp.
- [15] K. Diethelm; *The analysis of fractional differential equation*, Springer, Berlin, 2010.
- [16] S. Dipierro, E. Valdinoci et al; *Mixed local and nonlocal elliptic operators: regularity and maximum principles*, Communications in Partial Differential Equations 47(3), 2022, 585 - 629.

- [17] N. V. Duc, L. D. N. Minh and N. T. Thanh; *Identifying an unknown source term in a heat equation with time - dependent coefficients*, Inverse Problems in Science and Engineering, 2020, 27pp.
- [18] Yu. V. Egorov and M. A. Shubin; *Foundations of the Classical Theory of Partial Differential Equations*, Springer Berlin, 2013.
- [19] A. Jacquier and L. Torricelli; *Anomalous Diffusions in Option Prices: Connecting Trade Duration and the Volatility Term Structure*, SIAM Journal on Financial Mathematics, 11, 2020, 1137-1167.
- [20] D. N. D. Hai; *Regularization for a Riesz - Feller space fractional backward diffusion problem with a time - dependent coefficient*, Science & Technology Development, Vol 5, No. T20, 2017, 172 - 183.
- [21] D. N, Hao and N. V. Duc; *Stability results for backward parabolic equations with time - dependent coefficients*, Inverse Problems, Volume 27, No. 2, 025003,2011, 20 pp.
- [22] D. N. Hao, N. V, Duc and N. V. Thang; *Backward semi - linear parabolic equations with time - dependent coefficients and locally Lipschitz source*, Inverse Problems, 34, 055010, 2018, 33 pp.
- [23] D. N. Hao and P. M. Hien; *Stability results for the Cauchy problem for the Laplace equation in a strip*, Inverse Problem.19, 2003, 833–844.
- [24] P. T. Hieu and P. H. Quan; *On regularization and error estimates for the Cauchy problem of the modified inhomogeneous Helmholtz equation*, Journal of Inverse and Ill -posed Problems, 24, 2016, 515 - 526.
- [25] Z. Hongwu, and Z. Xiaoju; *Regularization method for an ill - posed Cauchy problem of nonlinear elliptic equation*, Journal of Mathematics, Volume 40 Issue 4, , 2020, 395 - 407.

- [26] B. Kaltenbacher, W. Rundell; *Inverse Problems for Fractional Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 2023.
- [27] T. Kalwarczyk, K. Kwapiszewska, K. Szczepanski, K. Sozanski, J. Szymanski, B. Michalska, P. P. Krawczyk, J. Duszynski, and R. Holyst; *Apparent Anomalous Diffusion in the Cytoplasm of Human Cells: The Effect of Probes' Polydispersity*, The Journal of Physical Chemistry B, 121, 2017, 9831–9837.
- [28] Andreas Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, Springer, 1996.
- [29] T. T. Khieu and V. H. Hung; *Recovering the historical distribution for nonlinear space – fractional diffusion equation with temporally dependent thermal conductivity in higher dimensional space*, Journal of Computational and Applied Mathematics ,2018, 19pp.
- [30] D. C. Lamas, B.S. Huang, Y. Q. Tian et al; *Regularity results of solutions to elliptic equations involving mixed local and nonlocal operators*, AIMS Mathematics 7(3), 2022, 4199 - 4210.
- [31] R. Lattes, J. L. Lions, *Methodes de Quasi - Reversibility et Applications*, Dunod, Paris, 1967.
- [32] T. N. Luan and T. Q. Khanh; *Determination of initial distribution for a space - fractional diffusion equation with time - dependent diffusivity*, Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021, 28 pp.
- [33] E. Nane and N. H. Tuan; *Approximate Solutions of Inverse Problems for Nonlinear Space Fractional Diffusion Equations with Randomly Perturbed Data*, SIAM/ASA Journal of Uncertainty Quantification, Volume 6, No. 1, 2018, 302 - 338.

- [34] L. H. Phong, L. M. Triet, and P. H. Quan; *On a three dimensional Cauchy problem for inhomogeneous Helmholtz equation associated with perturbed wave number*, Journal of Computational and Applied Mathematics 335, 2018, 86–98.
- [35] I. Podlubny; *Fractional differential equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
- [36] Z. Qian, C. L. Fu, and Z. P. Li; *Two regularization methods for a Cauchy problem for the Laplace equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 338(1), 2008, 479 - 489.
- [37] Z. Qian, C. L. Fu, and X. T. Xiong; *Fourth - order modified method for the Cauchy problem for the Laplace equation*, Journal of Computational and Applied Mathematics 192, 2006, 205 - 218.
- [38] H. H. Qin, and T. Wei; *Modified regularization method for the Cauchy problem of the Helmholtz equation*, Applied Mathematical Modelling 33, 2009, 2334 - 2348.
- [39] H. H. Qin, and T. Wei; *Two regularization methods for the Cauchy problem of the Helmholtz equation*, Applied Mathematical Modelling 34, , 2010, 947 - 967.
- [40] P. H. Quan, P. T. Hieu, and V. V. Canh; *Regularizing a final value problem for nonlinear modified Helmholtz equation with randomly perturbed data*, Applicable Analysis, 102, 2023, 610 - 634.
- [41] P. H. Quan, L. M. Triet and D. D. Trong; *A regularization of the backward problem for nonlinear parabolic equation with time – dependent coefficient*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Volume 2012, 20pp.

- [42] P. H. Quan, D. D. Trong, L. M. Triet and N. H. Tuan; *A modified quasi - boundary value method for regularizing of a backward problem with time - dependent coefficient*, Inverse Problems in Science and Engineering, Volume 19, no.3, 2011, 409-423.
- [43] G. F. Roach, I. G. Stratis, and A. N. Yannacopoulos; *Mathematical Analysis of Deterministic and Stochastic Problems in Complex Media Electromagnetics*, Princeton University Press, 2012.
- [44] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev; *Fractional integrals and derivatives*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia, 1993.
- [45] M. Samuel and A. Thomas; *On fractional Helmholtz equations*, Fractional Calculus and Applied Analysis, 13, 2010, 295–308.
- [46] X. Su, E. Valdinoci, Y. Wei, and J. Zhang; *Regularity results for solutions of mixed local and nonlocal elliptic equations*, Mathematische Zeitschrift, 2022, 1855 - 1878.
- [47] K. Suleiman, Q. Song, X. Zhang, S. Liu, and L. Zheng; *Anomalous diffusion in a circular comb with external velocity field*, Chaos Solitons and Fractals, 155, 2022, 111742-111759.
- [48] A.N. Tikhonov and V. Y. Arsenin; *Solutions of Ill-posed Problems*, Winston, New York, 1977.
- [49] L. M. Triet, T. T. Khieu, T. Q. Khanh and V. H. Hung; *On a space fractional backward diffusion problem and its approximation of local solution*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 26pp.

- [50] L. M. Triet, P. H. Quan, L. H. Phong, and V. V. Canh; *Recovering the initial wave amplitude for nonlinear elliptic equation with locally Lipschitz source in multiple - dimensional domain*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 16pp.
- [51] L. M. Triet, P. H. Quan, D. D. Trong and N. H. Tuấn; *A backward parabolic equation with a time - dependent coefficient : Regularization and error estimates*, Journal of Computational and Applied Mathematics (237), 2013, 432 - 441.
- [52] D. D. Trong, T. D. Khanh, N. H. Tuan, and N. D. Minh; *Nonparametric regression in a statistical modified Helmholtz equation using the Fourier spectral regularization*, Statistics, 49, 2015, 267–290,.
- [53] D. D. Trong, P. H. Quan, T. V. Khanh and N. H. Tuan; *A nonlinear case of the 1-D backward heat problem: Regularization and error estimate*, Journal for Analysis and its Applications, Volume 26, 2007, 231-245.
- [54] D. D. Trong, P. H. Quan and N. H. Tuan; *A quasi -boundary value method for regularizing nonlinear ill-posed problems*, Electronic Journal of Differential Equations, Volume 2009, No. 109, 1-16.
- [55] D. D. Trong and N. H. Tuan; *Regularization and error estimate for the nonlinear backward heat problem using a method of integral equation*, Nonlinear Analysis, Volume 71, 2009, 4167-4176.
- [56] D. D. Trong, N. H. Tuan and P. H. Quan; *A new version of quasi - boundary value method for a 1-D nonlinear ill-posed heat problem*, Journal of Inverse Ill - posed Problems, Volume 17, 2009, 911-929.

- [57] N. H. Tuan, D. N. D. Hai, N. V. Thinh and M. Kirane; *On a Riesz - Feller space - fractional backward diffusion problem with a nonlinear source*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 312, 2017, 103 - 126.
- [58] N. H. Tuan, E. Nane, D. O' Regan and N. D. Phuong; *Approximation of mild solutions of a semilinear fractional elliptic equation with random noise*, Proceedings of The American Mathematical Society, 2020, 14pp.
- [59] N. H. Tuan, and P. H. Quan; *A Cauchy problem for Helmholtz equation: Regularization and error estimates*, Acta Universitatis Apulensis 25, 2011, 177 - 188.
- [60] N. H. Tuan, P. H. Quan, D. D. Trong and L. M. Triet; *On a backward heat problem with time - dependent coefficient : Regularization and error estimates*, Applied Mathematics and Computation, 219, 2013, 6066 - 6073.
- [61] N. H. Tuan, L. D. Thang, D. D. Trong, and V. A. Khoa; *Approximation of mild solutions of the linear and nonlinear elliptic equations*, Inverse Problems in Science and Engineering, 2015, 30 pp.
- [62] N. H. Tuan, D. D. Trong, D. N. D. Hai and D. D. X. Thanh; *A Riesz - Feller space - fractional backward diffusion problem with a time - dependent coefficient: Regularization and error estimates*, Mathematical Methods in The Applied Sciences, Volume 40, 2017, 4040 - 4064.
- [63] N. H. Tuan, D. D. Trong, and P. H. Quan; *A note on a Cauchy problem for the Laplace equation: Regularization and error estimates*, Applied Mathematics and. Computation, 217 (7), 2010, 2913 - 2922.

- [64] A. J. Turski, B. Atamaniuk, and E. Turska; *Fractional derivative analysis of Helmholtz and paraxial-wave equations*, Journal of Technical Physics, 44(2), 2003, 193 - 206.
- [65] T. Q. Viet, N. H. Tuan, N. V. Thinh, and D. D. Trong; *A general filter regularization method to solve the three dimensional Cauchy problem for inhomogeneous Helmholtz- type equations: Theory and numerical simulation*, Applied Mathematical Modelling, 2014, 20pp.
- [66] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Determining the initial distribution in space - fractional diffusion by a negative exponential regularization method*, Inverse Problems in Science and Engineering, 25, No.7, 2017, 965 - 977.
- [67] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Recovering the initial distribution for space - fractional diffusion equation by a logarithmic regularization method*, Applied Mathematics Letters 2016, 965 - 977.
- [68] G. H. Zheng and Q.G. Zhang; *Solving the backward problem for space - fractional diffusion equation by a fractional Tikhonov regularization method*, Mathematics and Computers in Simulation, Volume 148, 2018, 37 - 47.