

ỦY BAN NHÂN DÂN THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH  
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SÀI GÒN

TRẦN ĐỨC NGỌC

LÝ THUYẾT NEVANLINNA  
TRÊN ĐA TẠP KÄHLER VÀ ỨNG DỤNG

LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN GIẢI TÍCH  
MÃ SỐ: 9460102

Tập thể người hướng dẫn:

- PGS. TS. KIỀU PHƯƠNG CHI
- GS. TSKH. SĨ ĐỨC QUANG

Thành phố Hồ Chí Minh, năm 2025

# LỜI CAM ĐOAN

Tôi xác nhận rằng tất cả các kết quả được trình bày trong luận án này là hoàn toàn mới và đã được công bố trên các tạp chí toán học uy tín quốc tế. Các kết quả nêu trong luận án là hoàn toàn trung thực, đã được sự đồng ý của các đồng tác giả trong việc sử dụng, và chưa từng được công bố ở bất kỳ nghiên cứu hay công trình nào khác.

Nghiên cứu sinh

**Trần Đức Ngọc**

# LỜI CẢM ƠN

Luận án này đã được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của PGS.TS. Kiều Phương Chi và GS.TSKH. Sĩ Đức Quang. Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc và chân thành nhất đến hai người Thầy của mình, những người đã luôn dành thời gian chỉ bảo, chia sẻ kinh nghiệm và tạo điều kiện thuận lợi nhất cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu. Sự quan tâm và hỗ trợ của các Thầy đã góp phần không nhỏ vào sự thành công của luận án này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn trân trọng đến PGS.TS. Phạm Hoàng Quân, PGS.TS. Lê Minh Triết, người đã định hướng và khuyến khích tôi trong hành trình nghiên cứu khoa học. Những cơ hội học tập và giao lưu với các nhà nghiên cứu khác mà các Thầy đã tạo ra giúp tôi mở rộng kiến thức và hoàn thiện công trình nghiên cứu của mình.

Lời cảm ơn chân thành cũng được gửi đến Trường Đại học Sài Gòn, Phòng Sau đại học, và Ban Chủ nhiệm Khoa Toán. Sự giúp đỡ và tạo điều kiện thuận lợi của các cơ quan đã giúp tôi có môi trường nghiên cứu tốt nhất. Tôi xin cảm ơn các thầy cô và anh chị em trong seminar Giải tích của Khoa Toán Ứng Dụng, Trường Đại học Sài Gòn và seminar Hình học phức của Khoa Toán-Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, đặc biệt là PGS.TS. Phạm Đức Thoan, TS. Nguyễn Thị Nhung và NCS. Đỗ Thị Thúy Hằng về những trao đổi khoa học và lời khuyên hữu ích cho tôi trong suốt quá trình học tập và nghiên cứu.

Tôi xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến Trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, Ban giám hiệu nhà trường, và các đồng nghiệp trong Bộ môn Toán. Sự quan tâm, hỗ trợ và chia sẻ của các bạn đã giúp tôi có điều kiện thuận lợi để hoàn thành quá trình làm nghiên cứu sinh.

Cuối cùng, từ tận đáy lòng, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến gia đình và người thân đã luôn ở bên tôi, khích lệ, động viên và chia sẻ mọi khó khăn. Sự yêu thương và sự ủng hộ của những người thân đã là nguồn động lực lớn lao để tôi hoàn thành luận án này.

**Tác giả**

# MỤC LỤC

|                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| LỜI CAM ĐOAN                                                                                                           | i  |
| LỜI CẢM ƠN                                                                                                             | ii |
| DANH MỤC CÁC QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU                                                                                        | v  |
| MỞ ĐẦU                                                                                                                 | 1  |
| 1 TỔNG QUAN                                                                                                            | 6  |
| 2 QUAN HỆ SỐ KHUYẾT KHÔNG LẤY TÍCH PHÂN CHO<br>ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VÀ HỌ SIÊU PHẪNG Ở VỊ TRÍ DƯỚI<br>TỔNG QUÁT            | 20 |
| 2.1 Một số kiến thức chuẩn bị . . . . .                                                                                | 20 |
| 2.2 Quan hệ số khuyết không lấy tích phân với họ siêu phẳng ở vị trí<br>dưới tổng quát . . . . .                       | 27 |
| 3 QUAN HỆ SỐ KHUYẾT KHÔNG LẤY TÍCH PHÂN CHO<br>ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VÀO ĐA TẬP XẠ ẢNH VÀ HỌ SIÊU<br>MẶT TÙY Ý              | 40 |
| 3.1 Trọng Chow và trọng Hilbert . . . . .                                                                              | 40 |
| 3.2 Quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình<br>từ đa tạp Kähler với họ siêu mặt tùy ý . . . . . | 43 |
| 4 ÁNH XẠ PHÂN HÌNH TRÊN ĐA TẬP KÄHLER CÓ CHUNG<br>ẢNH NGƯỢC MỘT SỐ SIÊU PHẪNG                                          | 55 |
| 4.1 Định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình và họ siêu mặt ở vị trí<br>dưới tổng quát. . . . .                           | 55 |

|                                                              |                                                                                |           |
|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2                                                          | Ảnh xạ phân hình không suy biến vi phân chia sẻ yếu một họ siêu phẳng. . . . . | 62        |
| 4.3                                                          | Các ánh xạ phân hình chung ảnh ngược của các họ siêu phẳng khác nhau. . . . .  | 70        |
| <b>KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ</b>                                 |                                                                                | <b>82</b> |
| <b>DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN</b> |                                                                                | <b>84</b> |
| <b>TÀI LIỆU THAM KHẢO</b>                                    |                                                                                | <b>85</b> |

## DANH MỤC CÁC QUY ƯỚC VÀ KÍ HIỆU

Trong toàn bộ luận án, chúng tôi thống nhất một số kí hiệu như sau.

- $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ : không gian xạ ảnh phức  $n$ -chiều.
- $\|z\| = (|z_1|^2 + \cdots + |z_m|^2)^{1/2}$  với  $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ .
- $\mathbb{B}(r) := \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| < r\}$  là hình cầu mở bán kính  $r$  trong  $\mathbb{C}^m$ .
- $S(r) := \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = r\}$  là mặt cầu bán kính  $r$  trong  $\mathbb{C}^m$ .
- $d = \partial + \bar{\partial}$ ,  $d^c := \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial)$ : các toán tử vi phân.
- $\sigma_m(z) := d^c \log \|z\|^2 \wedge (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1}$  trên  $\mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ .  
và  $v_{m-1}(z) := (dd^c \|z\|^2)^{m-1}$ : các dạng vi phân.
- $O(1)$ : hàm bị chặn đối với  $r$ .
- $O(r)$ : vô cùng lớn cùng bậc với  $r$  khi  $r \rightarrow +\infty$ .
- $o(r)$ : vô cùng bé bậc cao hơn  $r$  khi  $r \rightarrow +\infty$ .
- $\log^+ r = \max\{\log r, 0\}$ ,  $r \geq 0$ .
- “ $\| P$ ”: có nghĩa là mệnh đề  $P$  đúng với mọi  $r \in [0, +\infty)$  nằm ngoài một tập con Borel  $E$  của  $[0, +\infty)$  thoả mãn  $\int_E dr < +\infty$ .
- $|S|$ : lực lượng của tập hợp  $S$ .
- $I(x)$ : số nguyên lớn nhất không vượt quá  $x$ .
- $\text{BCNN}\{d_1, \dots, d_q\}$ : bội số chung nhỏ nhất của các số nguyên dương  $d_1, \dots, d_q$ .
- $\text{Zero}(h)$ : tập các không điểm của hàm  $h$ .
- $\text{supp}(\nu)$ : giá của divisor  $\nu$ .

# MỞ ĐẦU

## 1. Lý do chọn đề tài

Lý thuyết phân bố giá trị của các hàm phân hình trên mặt phẳng phức có nguồn gốc từ các lý thuyết cổ điển được phát triển bởi Sokhotskii-Casorati, Weierstrass, và Picard vào giữa thế kỷ XIX. Vào cuối thế kỷ XIX và đầu thế kỷ XX, các lý thuyết này đã được mở rộng thông qua nghiên cứu sự phân bố không điểm của các hàm nguyên, chủ yếu bởi trường phái Pháp, bao gồm Hadamard, Borel, Valiron, và những người khác. Vào những năm 1920, nhà toán học Phần Lan R. Nevanlinna đã xây dựng công cụ giải tích cho ánh xạ phân hình, góp phần làm cho lý thuyết phân bố giá trị trở nên hoàn chỉnh hơn. Lý thuyết Nevanlinna liên tục thu hút được sự quan tâm của đông đảo các nhà toán học ở cả hai khía cạnh: phát triển lý thuyết nội tại và tìm kiếm những mối liên hệ với các lĩnh vực khác của Toán học.

Đầu tiên, vào năm 1925, R. Nevanlinna công bố bài báo về phân bố giá trị của hàm phân hình trên mặt phẳng phức và năm sau ông đã mở rộng định lý Picard nhỏ bằng cách chứng minh hai định lý cơ bản, hiện được biết đến với tên gọi định lý cơ bản thứ nhất và thứ hai (xem [1]) cho hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức, với mục tiêu là các giá trị phức và bội giao được ngắt bởi 1. Các nghiên cứu của Nevanlinna ngay lập tức thu hút sự chú ý từ cộng đồng toán học và dẫn đến nhiều nghiên cứu tiếp theo, như công trình của A. Bloch [2], H. Cartan ([3], [4]) và H. Weyl [5]. Đặc biệt, H. Cartan đã mở rộng lý thuyết Nevanlinna cho đường cong chỉnh hình trong không gian xạ ảnh phức, và L. Ahlfors [6] đã đưa ra cách tiếp cận hình học cho các kết quả này.

Nội dung cốt lõi của Lý thuyết Nevanlinna tập trung ở hai định lý chính, được gọi là các Định lý cơ bản thứ nhất và Định lý cơ bản thứ hai. Định lý cơ bản thứ nhất xuất phát từ công thức Jensen và luôn được thiết lập một cách dễ dàng trong mọi trường hợp. Tuy nhiên, Định lý cơ bản thứ hai không được

như vậy; việc thiết lập định lý này là rất khó và cho đến nay người ta chỉ mới thiết lập được trong một số trường hợp nhất định. Mở rộng đáng chú ý đầu tiên là của H. Cartan vào năm 1933 khi ông tổng quát kết quả của Nevanlinna cho ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}$  vào không gian xạ ảnh phức  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Tiếp đó, vào năm 1953, W. Stoll [7] mở rộng kết quả trên cho ánh xạ chỉnh hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Các nhà toán học khác như P. Griffiths và B. Shiffman đã mở rộng lý thuyết cho trường hợp ánh xạ phân hình từ đa tạp parabolic nhiều chiều vào đa tạp xạ ảnh. Kể từ đó, các kết quả kinh điển của lý thuyết về ánh xạ phân hình đã được tích hợp một cách tự nhiên vào lý thuyết của Nevanlinna. Đặc biệt, vào năm 1983, Nochka thiết lập định lý cơ bản thứ hai cho đường cong chỉnh hình khác hằng trong không gian xạ ảnh với mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Kết quả của Nochka đã giúp hoàn thiện trọn vẹn định lý cơ bản thứ hai của Cartan thiết lập vào năm 1933. Sự phát triển của các định lý cơ bản thứ hai cũng đồng thời mang lại một công cụ vô cùng hiệu quả cho việc nghiên cứu các tính chất của ánh xạ phân hình thông qua ảnh ngược của các siêu phẳng hoặc siêu mặt. Đặc biệt là việc nghiên cứu về tính duy nhất và sự phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình có chung ảnh ngược với họ các siêu phẳng hay siêu mặt được phát triển mạnh mẽ trong khoảng 30 năm trở lại đây.

Trong bối cảnh đó, lý thuyết Nevanlinna đã được mở rộng cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh. Đầu tiên, H. Fujimoto [8] nghiên cứu sự phân bố giá trị của ánh xạ phân hình từ một đa tạp Kähler  $M$  đầy, có phủ song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}(R_0)$  trong không gian phức  $\mathbb{C}^m$ . Do không có hàm vết cận parabolic trên đa tạp Kähler tổng quát nên không thể xây dựng được các định lý cơ bản thứ hai như thông thường. Ông đã đề xuất các khái niệm và phương pháp mới, đặc biệt là khái niệm số khuyết không lấy tích phân và quan hệ số khuyết cho ánh xạ phân hình từ đa tạp  $M$  vào không gian xạ ảnh tương ứng với họ các siêu phẳng. Sau đó, T. V. Tấn và V. V. Trường [9] đã mở rộng kết quả này cho các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát (theo một nghĩa đặc biệt). Độc lập với hai tác giả trên, M. Ru và S. Sogome [10] đã mở rộng kết quả của Fujimoto cho các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Các nghiên cứu tiếp theo của Q. Yan [11] và Đ. Đ. Thái - S. Đ. Quang [12] đã thiết lập quan hệ số khuyết cho ánh xạ phân hình và các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát theo

nghĩa thông thường. Đặc biệt, với việc sử dụng phương pháp thay thế siêu mặt được đề xuất bởi S. D. Quang [31], nhóm các tác giả S. D. Quang, L. N. Quynh, N. T. Nhung và N. T. Q. Phương [19, 20, 26] đã đưa ra nhiều kết quả tốt hơn về quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho trường hợp họ siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát hoặc họ siêu mặt tùy ý. Tuy nhiên, các kết quả hiện tại vẫn còn xa so với mong muốn của giới nghiên cứu về một kết quả tối ưu nhất. Do vậy, câu hỏi đặt ra là: “*Có phương pháp nào để thiết lập các quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các siêu mặt tối ưu hơn không và có thể sử dụng phương pháp đó để nghiên cứu các vấn đề liên quan về ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler không như tính duy nhất và phụ thuộc đại số của các ánh xạ không?*”. Luận án này sẽ tập trung nghiên cứu những vấn đề trên.

Vì những lý do trên, chúng tôi chọn đề tài “***Lý thuyết Nevanlinna trên đa tạp Kähler và các ứng dụng***” để nghiên cứu việc thiết lập quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình và các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát, đồng thời giải quyết bài toán duy nhất và sự phụ thuộc đại số cho các ánh xạ phân hình giao với họ siêu phẳng.

## 2. Mục đích nghiên cứu

Mục đích chính của luận án là thiết lập các quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh và ứng dụng nghiên cứu các tính chất của họ các ánh xạ phân hình. Mục đích nghiên cứu bao gồm ba nội dung chính: thứ nhất là thiết lập quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình với mục tiêu là họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát; thứ hai là thiết lập quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình với mục tiêu là họ siêu mặt tùy ý trong đa tạp xạ ảnh; và cuối cùng là nghiên cứu các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược với một số siêu phẳng. Luận án cũng sẽ mở rộng nghiên cứu về bài toán duy nhất và bài toán suy biến hoặc phụ thuộc đại số của các ánh xạ phân hình trong các tình huống nêu trên.

## 3. Đối tượng và phạm vi nghiên cứu

Đối tượng nghiên cứu của luận án là các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh.

Đề tài được nghiên cứu trong phạm vi của lý thuyết phân bố giá trị cho ánh

xạ phân hình từ đa tạp Kähler đầy vào đa tạp xạ ảnh.

#### 4. Phương pháp nghiên cứu

Để giải quyết các vấn đề đặt ra trong luận án, chúng tôi sử dụng những phương pháp của lý thuyết phân bố giá trị, hình học phức và giải tích phức. Bên cạnh việc sử dụng các kỹ thuật truyền thống, chúng tôi đưa ra những kỹ thuật mới nhằm đạt được những mục đích đã đặt ra trong đề tài.

#### 5. Ý nghĩa khoa học và thực tiễn

Luận án góp phần làm sâu sắc hơn các kết quả về quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh với họ siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát hoặc họ siêu mặt tùy ý. Bên cạnh đó, luận án làm phong phú thêm các hiểu biết về sự duy nhất hay sự phụ thuộc đại số của những ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh với điều kiện về ảnh ngược của họ các siêu phẳng.

Luận án có thể là tài liệu tham khảo cho sinh viên, học viên cao học và nghiên cứu sinh theo hướng nghiên cứu này.

#### 6. Cấu trúc luận án

Cấu trúc của luận án bao gồm bốn chương chính. Chương Tổng quan dành để phân tích một số kết quả nghiên cứu của những tác giả trong và ngoài nước liên quan đến nội dung của đề tài. Ba chương còn lại trình bày các kiến thức chuẩn bị cũng như những chứng minh chi tiết cho các kết quả mới của đề tài.

**Chương I.** Tổng quan.

**Chương II:** Quan hệ số khuyết không tích phân cho ánh xạ phân hình và họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.

**Chương III:** Quan hệ số khuyết không tích phân cho ánh xạ phân hình vào đa tạp xạ ảnh và họ siêu mặt tùy ý.

**Chương IV:** Ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược một số siêu phẳng.

Luận án được viết dựa trên bốn bài báo đã được đăng (xem mục Các công trình đã công bố liên quan đến luận án). Trong đó, Chương 2 được viết dựa trên một phần của bài báo [1], Chương 3 được viết dựa trên bài báo [2] và chương cuối của luận án được viết dựa trên các bài báo [3], [4] và một phần trong bài báo [1] (xem mục Các công trình đã công bố liên quan đến luận án).

## **7. Nơi thực hiện luận án**

Trường Đại học Sài Gòn.

# Chương 1

## TỔNG QUAN

Đối tượng nghiên cứu của chúng tôi trong luận án này là các ánh xạ phân hình từ một đa tạp Kähler đầy  $M$  có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  trong không gian phức  $\mathbb{C}^m$  vào đa tạp xạ ảnh. Chúng tôi tập trung nghiên cứu ba vấn đề chính. Vấn đề thứ nhất đó là quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh với họ các siêu phẳng. Cụ thể chúng tôi sẽ mở rộng các kết quả trước đây của Fujimoto về quan hệ số khuyết không lấy tích phân khi thay vì xét họ siêu phẳng ở vị trí tổng quát trong không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  bởi họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát và đưa ra các đánh giá tối ưu hơn cho quan hệ số khuyết. Vấn đề thứ hai chúng tôi nghiên cứu là quan hệ số khuyết không lấy tích phân của ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh tùy ý giao với họ tùy ý các siêu mặt. Chúng tôi sẽ đưa ra những cải tiến tổng quát nhất và tốt hơn so với tất cả các kết quả trước đó về quan hệ số khuyết không lấy tích phân với họ mục tiêu là các siêu mặt của những tác giả trước. Cuối cùng, chúng tôi sẽ nghiên cứu về vấn đề duy nhất cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler đầy trùng nhau trên tập ảnh ngược của các siêu phẳng trong không gian xạ ảnh. Đây là một vấn đề rất gần gũi với bài toán thiết lập quan hệ số khuyết không tích phân vì cả hai vấn đề đều được nghiên cứu dựa trên phương pháp đánh giá các dòng sinh bởi các divisor của các hàm phụ trợ và các dòng sinh bởi các hàm đa điều hòa dưới đặc trưng cho độ tăng của các ánh xạ phân hình.

Tiếp theo, chúng tôi sẽ tiến hành phân tích chi tiết về lịch sử của mỗi vấn đề và tính mới trong kết quả nghiên cứu của chúng tôi so với kết quả nghiên cứu trước đó của các tác giả khác. Để tiện cho việc trình bày, trong toàn bộ phần

tổng quan này, khi nói đến đa tạp Kähler  $M$ , chúng ta luôn giả sử rằng  $M$  là đa tạp đầy và có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}(R_0)$  trong không gian  $\mathbb{C}^m$ .

**Vấn đề 1. Quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình và họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.**

Chúng ta biết rằng mỗi đa thức  $P$  bậc  $n > 0$  với hệ số phức thì luôn nhận mọi giá trị phức đúng  $n$  lần (tính cả bội). Như vậy ta có thể nói rằng giá trị của đa thức  $P$  được phân bố đều đặn trên  $\mathbb{C}$  và không bị khuyết với mọi giá trị nào. Khi mở rộng sang đối với hàm phân hình  $f$  trên mặt phẳng  $\mathbb{C}$  thì điều này không còn đúng. Với hầu hết các giá trị phức thì độ tăng của "số lần" nhận giá trị đó trên các hình tròn  $\{|z| < r\}$  là tương đương nhau. Ta có thể nói rằng phân bố giá trị của  $f$  tương ứng với các giá trị đó là không bị khuyết. Tuy nhiên, có thể có một số đếm được các giá trị phức mà độ tăng của số lần nhận giá trị này thấp hơn mức bình thường. Khi đó ta xem rằng phân bố giá trị của  $f$  bị khuyết tại những giá trị này. Để đặc trưng cho tính khuyết này, các nhà toán học định nghĩa ra khái niệm số khuyết của hàm phân hình  $f$  tương ứng với giá trị  $a$ , kí hiệu là  $\delta_{f,*}(a)$  (hoặc số khuyết  $\delta_{f,*}^{[k]}(a)$  với bội chặn bởi  $k$ ) dựa trên hàm đặc trưng Nevanlinna  $T(r, f)$  và hàm đếm các  $a$ -điểm  $N_{f-a}(r)$  (hoặc hàm đến  $N_{f-a}^{[k]}(r)$  được chặn bội bởi  $k$ ) được đề xuất bởi R. Nevanlinna vào năm 1926. Khi phân bố giá trị của  $f$  không bị khuyết tại  $a$  (điều này xảy ra với hầu hết các giá trị  $a$ ) thì  $\delta_{f,*}(a) = 0$ . Ngược lại thì  $\delta_{f,*}(a) > 0$ . Đặc biệt  $\delta_{f,*}(a) = 1$  (giá trị lớn nhất có thể) nếu  $f$  không nhận giá trị  $a$ . Một tính chất rất đẹp trong lý thuyết Nevanlinna được chỉ ra là

$$\sum_{a \in \mathbb{C}} \delta_{f,*}^{[1]}(a) \leq 2.$$

Bất đẳng thức trên được gọi là quan hệ số cho hàm phân hình và họ các giá trị phức. Bất đẳng thức này thu được nhờ việc thiết lập định lý cơ bản thứ hai của Nevanlinna cho các hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$ .

Trong thế kỉ trước, lý thuyết về định lý cơ bản thứ hai và quan hệ số khuyết của Nevanlinna được nhiều nhà toán học mở rộng lên cho trường hợp các ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và các giá trị  $a$  được thay bởi các divisor  $D$  (siêu phẳng hoặc siêu mặt). Đặc trưng cho sự thiếu hụt của phân bố giá trị của  $f$  trên  $D$ , chúng ta cũng có khái niệm số khuyết  $\delta_{f,*}^{[k]}(D)$  được định

nghĩa thông qua hàm đặc trưng  $T_f(r)$  và hàm đếm  $N^{[k]}(r, f^*D)$  của divisor  $f^*D$ . Khi đó ta cũng thu được các quan hệ số khuyết tương tự như cho trường hợp hàm phân hình nhờ dựa vào các định lý cơ bản thứ hai cho các ánh xạ phân hình vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Chúng tôi lưu ý rằng kết quả trung tâm của lý thuyết Nevanlinna là định lý cơ bản thứ hai cho các ánh xạ phân hình  $f$  vào các đa tạp xạ ảnh với họ các divisor  $\{D_i\}_{i=1}^q$ . Định lý này cho chúng tôi một bất đẳng thức để đánh giá hàm đặc trưng  $T_f(r)$  với tổng của các hàm đếm  $N^{[k]}(r, f^*D_i)$  của  $f$  tương ứng với các divisor  $D_i$ , có thể sai khác một đại lượng nhiều  $S_f(r)$  nào đó. Trong trường hợp ánh xạ từ  $\mathbb{C}^m$ , thì đại lượng  $S_f(r)$  là rất nhỏ so với hàm đặc trưng  $T_f(r)$  do vậy định lý cơ bản thứ hai trở lên có giá trị và ta có thể dựa vào đó để thu được quan hệ số khuyết. Tuy nhiên, nếu xét bài toán khi ánh xạ phân hình từ một đa tạp Kähler đầy nói chung, và hình cầu  $\mathbb{B}(R_0)$  với bán kính  $R_0 < \infty$  nói riêng, thì điều này không đúng và do vậy Định lý cơ bản thứ hai nếu có thiết lập được thì cũng không mang lại giá trị. Điều này khiến cho các phương pháp nghiên cứu về tính chất của ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler thông qua đánh giá qua hàm đếm và hàm đặc trưng không còn phù hợp. Để thay thế cho định lý cơ bản thứ hai và số khuyết cổ điển, năm 1983, H. Fujimoto [17] đã giới thiệu khái niệm số *khuyết không lấy tích phân*  $\delta_f^{[k]}(D)$  (xem định nghĩa trong Chương 2) cho ánh xạ chỉnh hình từ các mặt Riemann mở vào không gian xạ ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  mà không cần thông qua hàm đặc trưng và hàm đếm. Đồng thời ông cũng thu được các quan hệ số khuyết tương tự như trong trường hợp ánh xạ phân hình trên  $\mathbb{C}^m$ . Đến năm 1985, Fujimoto [8] tiếp tục mở rộng các kết quả này cho trường hợp ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler  $M$  nhiều chiều vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Để thuận tiện cho việc trình bày, chúng tôi nhắc lại định nghĩa sau.

**Định nghĩa 1.0.1.** Cho  $\{H_i\}_{i=1}^q$  là họ  $q$  ( $q \geq N+1$ ) siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ( $N \geq n$ ). Ta nói  $\{H_i\}_{i=1}^q$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  nếu

$$\bigcap_{0 \leq j \leq N} H_{i_j} = \emptyset, \quad \forall 1 \leq i_0 < \dots < i_N \leq q.$$

Nếu  $\{H_i\}_{i=1}^q$  ở vị trí  $n$ -dưới tổng quát thì ta nói  $\{H_i\}_{i=1}^q$  ở vị trí tổng quát.

Tương tự, cho  $V$  là một đa tạp xạ ảnh trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với chiều  $k > 0$ . Xét  $q$  siêu mặt  $Q_1, \dots, Q_q$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Các siêu mặt  $Q_1, \dots, Q_q$  được nói là ở vị trí  $N$ -dưới

tổng quát đối với  $V$  ( $k \leq N \leq q - 1$ ) nếu

$$Q_{j_1} \cap \cdots \cap Q_{j_{N+1}} \cap V = \emptyset \text{ với mọi } 1 \leq j_1 < \cdots < j_{N+1} \leq q.$$

Khi  $N = k$ , ta nói rằng  $Q_1, \dots, Q_q$  ở vị trí tổng quát đối với  $V$ . Nếu  $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , thì ta đơn giản nói rằng  $Q_1, \dots, Q_q$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát.

Năm 1985, H. Fujimoto [8] đã thiết lập một quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình và một tập hợp các siêu phẳng ở vị trí tổng quát thông qua định lý sau.

**Định lý A** (xem [8, Theorem 1.1]) *Giả sử  $M$  là một đa tạp Kähler đầy  $m$  chiều. Giả thiết rằng  $M$  có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$ . Giả sử  $f : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính (tức là ảnh của nó không được chứa trong bất kỳ siêu phẳng nào của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ). Gọi  $H_1, \dots, H_q$  là các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Với một số  $\rho \geq 0$ , nếu  $f$  thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  thì*

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[n]}(H_i) \leq n + 1 + \rho n(n + 1).$$

Ở đây  $(C_\rho)$  là một điều kiện liên quan đến độ tăng của thể tích của ảnh của ánh xạ  $f$  (xem định nghĩa trong Chương 2). Bất đẳng thức trong định lý trên được gọi là quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ  $f$  với họ mục tiêu là các siêu phẳng  $\{H_i\}_{i=1}^q$  và bội chặn là  $n$ .

Mục đích của chúng tôi trong phần này là mở rộng kết quả của Fujimoto cho trường hợp tổng quát khi họ các siêu phẳng  $\{H_i\}_{i=1}^q$  ở vị trí dưới tổng quát, đồng thời cải thiện kết quả của ông và các tác giả trước đó bằng cách làm tối ưu bất đẳng thức của quan hệ số khuyết không lấy tích phân. Đặc biệt, chúng tôi cũng xem xét trường hợp tổng số khuyết  $\sum_{i=1}^q \delta_f^{[n]}(H_i)$  được thay thế bằng số khuyết  $\delta_f^{[k]}(D)$  với  $D$  là siêu mặt cho bởi  $D = H_1 + \cdots + H_q$ . Với các ký hiệu  $r_f, l_f, m_f$  được định nghĩa như trong Mục 2.1 của Chương 2, kết quả đầu tiên của chúng tôi là định lý sau.

**Định lý 2.2.1.** *Cho  $\{H_i\}_{i=1}^q$  là các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ( $q > 2N - n + 1$ ) ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát ( $N \geq n$ ). Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy  $m$  chiều có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Cho  $f$  là một ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và*

$D = H_1 + \cdots + H_q$  (như một divisor). Với một số  $\rho \geq 0$ , nếu  $f$  thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$  thì ta có

$$(a) \quad \delta_f^{[m_f]}(D) \leq 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(2N - n + 1)}{q(n + 1)} + 2\rho \frac{l_f}{q},$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i) \leq 2N - n + 1 + 2\rho \frac{(2N - n + 1)l_f}{n + 1}.$$

Trên thực tế, hai mệnh đề của Định lý 2.2.1 xuất phát từ hai cách khác nhau trong việc đánh giá dòng sinh bởi các hàm đa điều hòa dưới  $\frac{|W_\alpha(f)|}{\prod_{i=1}^q |(\tilde{f}, H_i)|^{\omega_i}}$ , trong đó  $W_\alpha(f)$  là wronskian tổng quát của  $f$  và  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq q}$  là các trọng số Nochka cho họ siêu phẳng  $\{H_i\}_{i=1}^q$  (các khái niệm này được định nghĩa trong Mục 2.1).

## Vấn đề 2. Quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình vào đa tạp xạ ảnh và họ siêu mặt tùy ý.

Trong vài năm gần đây, dựa trên sự phát triển của lý thuyết Nevanlinna, quan hệ số khuyết không lấy tích phân của các ánh xạ phân hình với mục tiêu là các siêu mặt đã được nghiên cứu rất sâu rộng. *Định lý A* đã được nhiều tác giả mở rộng trong nhiều công trình được xuất bản gần đây, chẳng hạn như [10], [11], [12], [18], [19], [20]... Đại lượng ở vế phải trong bất đẳng thức của *Định lý A* được gọi *tổng số khuyết không lấy tích phân* với bội chặn  $n$  của ánh xạ phân hình  $f$  đối với họ mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát.

Bây giờ, ta xét trường hợp  $f : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một ánh xạ phân hình không suy biến đại số, tức là ảnh của  $f$  không được chứa trong một siêu mặt nào của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Cho  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  là một họ các siêu mặt sao cho  $f(M) \not\subset Q_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ). Bằng cách sử dụng *phương pháp lọc* của P. Corvaja và U. Zannier [21], một số tác giả đã đạt thu được những mở rộng đáng chú ý của Định lý A.

Đầu tiên, vào năm 2012, M. Ru và S. Sogome [10] đã mở rộng Định lý A cho trường hợp ánh xạ phân hình giao với một tập hợp các siêu mặt ở vị trí tổng quát. Các tác giả chứng minh định lý sau.

**Định lý B.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy  $m$  chiều có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$ . Giả sử  $f : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là ánh xạ phân hình không suy biến đại số và thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$  với  $\rho \geq 0$ . Cho  $Q_1, \dots, Q_q$  ( $q \geq n + 1$ ) là các siêu mặt ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Khi đó, với mỗi  $\epsilon > 0$ , ta*

có

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_i) \leq n + 1 + \epsilon + \frac{\rho L(L-1)}{d},$$

trong đó  $L = \left\lceil 2^{n^2+4n} e^n d^{2n} (nI(\epsilon^{-1}))^n \right\rceil$ ,  $d = \text{lcm}(\deg Q_1, \dots, \deg Q_q)$ .

Ở đây,  $[x]$  (tương ứng  $I(x)$ ) là số nguyên nhỏ nhất không vượt quá (tương ứng vượt quá) số thực  $x$ .

Tiếp đó, vào năm 2013, Q. Yan [11] đã mở rộng Định lý B bằng cách xét trường hợp các siêu mặt ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát. Q. Yan đã chứng minh kết quả sau.

**Định lý C.** Cho  $M$  và  $f$  như trong Định lý B. Cho  $Q_1, \dots, Q_q$  ( $q \geq n+1$ ) là các siêu mặt ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Với mỗi  $\epsilon > 0$ , ta có

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_i) \leq N(n+1) + \epsilon + \frac{\rho L(L-1)}{d},$$

trong đó  $L = \left\lceil (3eNdI(\epsilon^{-1}))^n (n+1)^{3n} \right\rceil$ .

Sau đó, vào năm 2017, S. D. Quang, N. T. Q. Phuong và N. T. Nhung [19] đã cải tiến định lý C như sau.

**Định lý D.** Với các giả thiết của Định lý C, với mỗi  $\epsilon > 0$ , ta có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq (N-n+1)(n+1) + \epsilon + \frac{\rho L(L-1)}{d},$$

trong đó  $L = \left\lceil e^{n+2} (d(N+n-1)(n+1)^2 I(\epsilon^{-1}))^n \right\rceil$ .

Trong các kết quả của ba định lý B-C-D trên, vế phải của các bất đẳng thức không phụ thuộc vào số các siêu mặt  $q$ . Tuy nhiên, chúng không thể được áp dụng cho trường hợp ánh xạ suy biến đại số, tức là ánh xạ vào một đa tạp xạ ảnh của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

Để giải quyết trường hợp ánh xạ phân hình suy biến đại số, các tác giả S.D.Quang - D. P. An trong [22] đã xây dựng khái niệm *trọng số Nochka* cho họ các siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát đối với một đa tạp xạ ảnh để áp dụng cho trường hợp này. Cụ thể, với phân hình  $f$  từ  $M$  vào một đa tạp con  $k$  chiều  $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và họ siêu mặt  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  ( $q \geq k+1$ ) ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát

đối với  $V$ , Quang và An đã chứng minh được

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[H_V(d)-1]}(Q_j) \leq \frac{(2N-k+1)H_V(d)}{k+1} + \frac{\rho(2N-k+1)H_V(d)(H_V(d)-1)}{(k+1)d},$$

trong đó  $f$  được giả sử là không suy biến trên  $I_d(V)$  (tức là, không có siêu mặt  $Q$  sao cho  $f(M) \subset Q$  và  $Q \not\subset V$ ) và  $H_V(d)$  là hàm Hilbert của  $V$ . Kết quả này cũng là tổng quát các kết quả trước đó cho ánh xạ phân hình và họ siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  của Đ. Đ. Thái - S. D. Quang [12] và Q. Han - W. Chen [18]. Trong kết quả này, mức cắt  $H_V(d)$  nhỏ hơn nhiều so với các kết quả của ba định lý đã đề cập ở trên. Tuy nhiên, số hạng đầu tiên  $\frac{(2N-k+1)H_V(d)}{k+1}$  của vế phải lại lớn hơn nhiều so với thông thường.

Gần đây, bằng cách sử dụng chặn dưới cho *trọng số Chow* của J. Evertse và R. Ferretti ([23], [24]); S. D. Quang và cộng sự ([25], [26]) đã xem xét trường hợp ánh xạ phân hình không suy biến đại số  $f$  từ  $M$  vào một đa tạp con  $k$  chiều  $V \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và đạt được kết quả sau:

- (xem S. D. Quang, L. N. Quỳnh và N. T. Nhung [25]) Nếu với  $\mathcal{Q}$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát với  $V$  thì với  $\epsilon > 0$  ta có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq (N-k+1)(k+1) + \epsilon + \frac{\rho\epsilon L(L-1)}{d},$$

trong đó  $L = \left\lceil d^{k^2+k} \deg(V)^{k+1} e^k p^k (2k+4)^k l^k \epsilon^{-k} + 1 \right\rceil$  và  $l = (k+1)(q!)$ .

- (xem S. D. Quang [26]) Nếu  $\mathcal{Q}$  có *hằng số phân bố*  $\Delta_{\mathcal{Q},V}$  với  $V$  thì với  $\epsilon > 0$  ta có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon + \frac{\rho\epsilon(L-1)}{d^{k+1}(2k+1)(k+1)(q!) \deg(V)}.$$

Trong đó  $L = \left\lceil d^{k^2+k} \deg(V)^{k+1} e^k \Delta_{\mathcal{Q},V}^k (2k+4)^k l^k \epsilon^{-k} + 1 \right\rceil$ ,  $l = (k+1)(q!)$  và hằng số phân bố  $\Delta_{\mathcal{Q},V}$  của họ  $\mathcal{Q}$  đối với  $V$  được định nghĩa bởi

$$\Delta_{\mathcal{Q},V} := \max_{\emptyset \neq \Gamma \subset \{1, \dots, q\}} \frac{\#\Gamma}{\dim V - \dim \left( V \cap \bigcap_{j \in \Gamma} Q_j \right)}.$$

Hai kết quả trên có thể được áp dụng cho trường hợp ánh xạ phân hình suy biến và lượng  $\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)$  là khá nhỏ. Tuy nhiên, trong hệ số của  $\rho$  có xuất hiện

nhân tử  $(q!\epsilon^{-1})^{k-1} > ((q-1)!)^{k-1}$ . Do đó, nếu  $\rho$  đủ lớn thì vế phải của bất đẳng thức luôn vượt quá  $q$  và vì thế quan hệ số khuyết này trở nên không có ý nghĩa.

Mục đích của chúng tôi trong phần này là cải thiện các kết quả được đề cập ở trên để thu được kết quả tổng quát nhất với đánh giá tối ưu nhất tổng các số khuyết không lấy tích phân. Đặc biệt là chúng tôi sẽ đưa ra chặn trên cho tổng các số khuyết này không phụ thuộc vào  $q$ . Để làm được điều đó, chúng tôi sẽ áp dụng đánh giá chặn dưới mới cho trọng Chow trong [27] (xem Bổ đề 3.1.5, Mục 3.1, Chương 3) và đồng thời đưa ra các kỹ thuật mới để kiểm soát hạng tử nhiễu xảy ra khi định lý về ước lượng cho trọng Hilbert được áp dụng. Kết quả chính của chúng tôi được phát biểu như sau.

**Định lý 3.2.1.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có chiều  $m$  và  $\omega$  là dạng Kähler của  $M$ . Giả sử  $M$  có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$ . Cho  $f$  là ánh xạ phân hình không suy biến đại số từ  $M$  vào một đa tạp con  $V$  có chiều  $k$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Cho  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  là họ các siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với hằng số phân bố  $\Delta_{\mathcal{Q}, V}$  đối với  $V$ . Gọi  $d = \text{lcm}\{\deg Q_1, \dots, \deg Q_q\}$  và cho  $\rho$  là một số không âm. Giả sử rằng tồn tại một hàm số  $h \geq 0$  liên tục và bị chặn trên  $M$  sao cho*

$$\rho\Omega_f + \text{dd}^c \log h^2 \geq \text{Ric } \omega.$$

*Khi đó, với mỗi  $\epsilon > 0$ , ta có*

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq \Delta_{\mathcal{Q}, V}(k+1) + \epsilon + \frac{\rho(L-1)(k+1)}{ud},$$

*trong đó*

$$u = \lceil \Delta_{\mathcal{Q}, V}(2k+1)(k+1)d^k \deg(V)(\Delta_{\mathcal{Q}, V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1) \rceil \text{ và } L = d^k \deg(V)^k \binom{k+u}{k}.$$

Ở đây,  $[x]$  là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn số thực  $x$ .

### Vấn đề 3. Ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược một số siêu phẳng.

Vào năm 1926, R. Nevanlinna [1] đã chứng minh rằng nếu hai hàm phân hình khác hằng trên mặt phẳng phức có cùng ảnh ngược của năm điểm phân biệt thì chúng sẽ bằng nhau. Đến năm 1975, H. Fujimoto [13] đã mở rộng kết quả của R. Nevanlinna cho trường hợp ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào không gian xạ

ảnh  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Ông chỉ ra rằng nếu hai ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  có cùng ảnh ngược của  $3n + 2$  siêu phẳng, tính cả bội, thì chúng sẽ trùng nhau. Sau đó, vào năm 1983, L. Smiley [14] đã chứng minh tính duy nhất của họ ánh xạ phân hình có cùng ảnh ngược của  $3n + 2$  siêu phẳng không tính bội bằng cách thêm điều kiện trùng nhau của các ánh xạ trên tập ảnh ngược của các siêu phẳng và yêu cầu giao của ảnh ngược của bất kỳ hai siêu phẳng nào trong họ phải có đối chiều ít nhất là hai. Đến năm 2006, Đ. Đ. Thái và S. Đ. Quang [28] đã đưa ra các hàm phụ trợ mới để cải tiến kết quả của L. Smiley với số lượng siêu phẳng giảm xuống còn  $3n + 1$  trong trường hợp  $n \geq 2$ . Sau đó, Z. Chen và Q. Yan [15] đã giảm được số siêu phẳng tham gia giảm xuống còn  $q = 2n + 3$ .

Một vấn đề thú vị đặt ra đó là tổng quát các kết quả về tính duy nhất cho ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  như trên lên cho trường hợp ánh xạ phân hình từ các đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh. Trong mục này, chúng tôi sẽ tập trung nghiên cứu vấn đề đó.

### 1) Định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình và họ siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát.

Một trong những kết quả đầu tiên về tính duy nhất của các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh có chung ảnh ngược với các siêu phẳng được đưa ra bởi H. Fujimoto. Năm 1986, Ông chứng minh kết quả sau.

**Định lý E.** *Cho  $M$  là đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với hình cầu  $B(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính. Nếu  $f, g$  thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$  và tồn tại  $q$  siêu phẳng  $H_1, \dots, H_q$  của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát sao cho  $f(z) = g(z)$  trên  $\bigcup_{j=1}^q (f^{-1}(H_j) \cup g^{-1}(H_j))$  và  $q > n + 1 + m_f + m_g + \rho(l_f + l_g)$  thì  $f \equiv g$ .*

Trong phần đầu tiên của mục này, chúng tôi sẽ tổng quát kết quả trên của H. Fujimoto. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh một định lý duy nhất cho các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược đối với các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí dưới tổng quát như sau.

**Định lý 4.1.1** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với hình cầu  $B(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính. Giả sử rằng  $f$  và  $g$  thỏa mãn điều kiện*

$(\mathcal{C}_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$  và tồn tại  $q$  siêu phẳng  $H_1, \dots, H_q$  của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát sao cho  $f(z) = g(z)$  trên  $\bigcup_{j=1}^q (f^{-1}(H_j) \cup g^{-1}(H_j))$ .

a) Nếu  $q > 2N - n + 1 + m_f + m_g + \frac{(l_f + l_g)}{n+1}(2N - n + 1)\rho$  thì  $f \equiv g$ .

b) Nếu  $q > 2N - n + 1 + \frac{2nq}{q+2n-2} + \frac{(l_f + l_g)}{n+1}(2N - n + 1)\rho$  và giả sử thêm rằng

$$\dim f^{-1}(H_i) \cap f^{-1}(H_j) \leq m - 2 \quad (1 \leq i < j \leq q)$$

thì  $f \equiv g$ .

Ở đây,  $\ell_f, m_f$  (tương tự cho  $\ell_g, m_g$ ) là các số nguyên dương chỉ phụ thuộc vào  $f$  và được định nghĩa trong Chương 2. Hơn nữa, ta có  $0 \leq m_f \leq l_f \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .

## 2) Ánh xạ phân hình không suy biến vi phân chia sẻ yếu một họ siêu phẳng.

Năm 1981, S. Drouilhet đã chứng minh rằng nếu hai ánh xạ phân hình không suy biến vi phân  $f$  và  $g$  từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  có cùng một ảnh ngược đối với một siêu mặt bậc ít nhất là  $n+4$  với chỉ các giao điểm bình thường và  $f = g$  trên ảnh ngược của siêu mặt này, thì  $f \equiv g$ . Định lý E bên trên của H. Fujimoto cũng kéo theo kết quả của S. Drouilhet cho trường hợp siêu mặt là tổng của  $n+4$  siêu phẳng ở vị trí tổng quát (như là divisor). Vào năm 2022, K. Zhou và L. Jin [30] đã xem xét trường hợp các ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  trong đó điều kiện hai ánh xạ  $f, g$  có cùng ảnh ngược với một số siêu phẳng  $H$  được thay thế bởi điều kiện yếu hơn là  $f^{-1}(H) \subset g^{-1}(H)$  và  $f = g$  trên  $f^{-1}(H)$ . Chúng tôi gọi điều kiện này là hai ánh xạ  $f$  và  $g$  “chia sẻ yếu” siêu phẳng  $H$ . Hai tác giả K. Zhou và L. Jin đã chứng minh kết quả sau.

**Định lý F** (xem [30, Theorem 1.1]). Cho  $f, g : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình và cho  $H_1, \dots, H_q$  là các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát sao cho  $f(\mathbb{C}^m) \not\subset H_j, g(\mathbb{C}^m) \not\subset H_j$  với mọi  $1 \leq j \leq q$  và  $\dim f^{-1}(H_i \cap H_j) \leq m - 2$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ . Giả sử rằng:

(a)  $f^{-1}(H_j) = g^{-1}(H_j)$  cho  $1 \leq j \leq p$ , và  $f^{-1}(H_j) \subseteq g^{-1}(H_j)$  cho  $p < j \leq q$ ,

(b)  $f \equiv g$  trên  $\bigcup_{j=1}^q f^{-1}(H_j)$ .

Khi đó  $f = g$  nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i)  $f$  hoặc  $g$  là khác hằng và  $p = 2n + 2, q > 3n + 3 - 2\sqrt{n}$ .

(ii)  $f$  hoặc  $g$  là không suy biến tuyến tính và  $p = 2n + 2, q \geq 2n + 3$ .

(iii)  $f$  hoặc  $g$  là khác hằng và  $p = 2n + 1, q \geq 4n + 3$ .

(iv) Cả  $f$  và  $g$  đều không suy biến tuyến tính và  $p = n + 2, q \geq n^3 + n^2 + n + 4$ .

Gần đây, S. D. Quang [32] đã mở rộng Định lý F cho trường hợp các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ đa tạp Kähler đầy vào không gian xạ ảnh chia sẻ yếu một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Mục tiêu đầu tiên của chúng tôi trong mục này là xem xét vấn đề trên cho trường hợp các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân trên đa tạp Kähler chia sẻ yếu một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Bằng cách áp dụng kỹ thuật đánh giá dòng sinh bởi các hàm phụ trợ được đề xuất trong [32] và cải tiến các đánh giá đó, chúng tôi sẽ đưa ra một ước lượng tối ưu cho số  $q$  các siêu phẳng tham gia trong định lý. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh kết quả sau.

**Định lý 4.2.1** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Giả sử  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân, thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một số  $\rho \geq 0$ . Cho  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát và cho số nguyên  $p$  với  $n + 2 \leq p \leq n + 3 < q$ . Giả sử rằng:*

(1)  $f^{-1}(H_i) = g^{-1}(H_i)$  với mọi  $1 \leq i \leq p$ ,  $f^{-1}(H_i) \subset g^{-1}(H_i)$  với mọi  $p+1 \leq i \leq q$ ,

(2)  $f = g$  trên  $\bigcup_{i=1}^q f^{-1}(H_i)$ .

Khi đó  $f \equiv g$  nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

(a)  $p = n + 2$  và  $q > 2n + 5 + 4n\rho$ .

(b)  $p = n + 3$  và  $q > n + 3 + 2n\rho$ .

Kết quả của chúng tôi suy ra kết quả đã đề cập của S. Drouilhet và H. Fujimoto trong trường hợp mục tiêu là các siêu phẳng. Để chứng minh Định lý 4.2.1, trước hết chúng tôi chứng minh một bổ đề then chốt có thể xem như một dạng tổng quát cho định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler (xem Bổ đề 4.2.4 trong Chương 4). Sử dụng Bổ đề 4.2.4 cùng với đưa ra các ước lượng độ tăng của các hàm phụ trợ chúng tôi thu được kết luận của Định lý 4.2.1. Hơn nữa, dựa vào Bổ đề 4.2.4, chúng tôi đồng thời chứng minh

một định lý phụ thuộc đại số cho các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân trên các đa tạp Kähler có chung ảnh ngược một số siêu phẳng như sau.

**Định lý 4.2.5** *Cho  $M$  như trong Định lý 4.2.1. Giả sử  $f^1, \dots, f^k : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là  $k$  ánh xạ phân hình không suy biến vi phân, thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$ . Cho  $\ell, p, q$  là các số nguyên dương với  $n+2 \leq p \leq q$  và  $2 \leq \ell \leq k$  và cho  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Giả sử rằng:*

$$(1) (f^u)^{-1}(H_i) = (f^1)^{-1}(H_i) \text{ với mọi } 1 \leq i \leq p \text{ và } 2 \leq u \leq k,$$

$$(2) f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_\ell} = 0 \text{ trên } \bigcup_{1 \leq i \leq q} (f^1)^{-1}(H_i) \text{ với mọi } 1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k.$$

Khi đó  $f^1 \wedge \dots \wedge f^k \equiv 0$  nếu  $q > n+1 + \frac{1}{k-\ell+1} \left(1 + \frac{p(k-1)}{p-n-1}\right) + 2n\rho \left(1 + \frac{(k-1)}{(k-\ell+1)(p-n-1)}\right)$ .

Trong chủ đề này, chúng tôi chỉ tập trung vào vấn đề duy nhất của họ các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân trên đa tạp Kähler chia sẻ yếu các siêu phẳng. Tuy nhiên, phương pháp của chúng tôi có thể được áp dụng để nghiên cứu vấn đề tính hữu hạn cho họ ánh xạ phân hình trên. Tuy nhiên, việc tính toán trong trường hợp đó chắc chắn rất phức tạp, vì có nhiều tham số hơn xuất hiện. Do vậy, vấn đề này vẫn là một câu hỏi mở thú vị.

### 3) Các ánh xạ phân hình chung ảnh ngược đối với các họ siêu phẳng khác nhau.

Năm 2012, G. Dethloff, S. D. Quang và T. V. Tan [33] đã xem xét trường hợp hai ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  có chung ảnh ngược đối với hai họ siêu phẳng khác nhau của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Để trình bày kết quả của họ, chúng ta nhắc lại một số khái niệm sau.

Cố định một hệ tọa độ thuần nhất  $\omega = (\omega_0 : \dots : \omega_n)$  trên  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Trong luận án này, mỗi siêu phẳng  $H$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  được xác định bởi một dạng tuyến tính và ta luôn kí hiệu chung là  $H$  nếu không có chú ý gì. Tức là

$$H = \{\omega \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) | H(\omega) = 0\}, \text{ với } H(\omega) = a_0\omega_0 + \dots + a_n\omega_n,$$

trong đó  $a_0, \dots, a_n$  là các hằng số không đồng thời bằng không. Với mỗi ánh xạ phân hình  $f$  từ một đa tạp phức  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với biểu diễn rút gọn (toàn cục hoặc địa phương)  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$ , ta đặt

$$H(\tilde{f}) = \sum_{i=0}^n a_i f_i.$$

Khi đó hàm  $H(\tilde{f})$  phụ thuộc vào việc chọn biểu diễn rút gọn  $\tilde{f}$  của  $f$ , tuy nhiên nếu cho  $L$  cũng là một siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thì hàm  $\frac{H(\tilde{f})}{L(\tilde{f})}$  không phụ thuộc vào việc chọn biểu diễn rút gọn này của  $f$ , và do vậy được kí hiệu là  $\frac{H(f)}{L(f)}$ .

Năm 2012, G. Dethloff, S. D. Quang và T. V. Tan đã chứng minh một định lý về tính duy nhất của họ ánh xạ phân hình có chung ảnh ngược với các họ siêu phẳng khác nhau. Kết quả của ba tác giả cho trường hợp các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính được phát biểu đơn giản như sau.

**Định lí G** (see [33, Theorem 1.2]). *Cho  $f$  và  $g$  là hai ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Cho  $\{H_j\}_{j=1}^q$  và  $\{L_j\}_{j=1}^q$  ( $q > 2n + 2$ ) là hai họ các dạng tuyến tính ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ . Giả sử rằng*

$$a) \quad f^{-1}(H_j) = g^{-1}(L_j) \text{ với mọi } 1 \leq j \leq q,$$

$$b) \quad \dim(f^{-1}(H_i) \cap f^{-1}(H_j)) \leq m - 2 \text{ với mọi } 1 \leq i < j \leq q,$$

$$c) \quad \frac{H_i(f)}{L_i(g)} = \frac{H_j(f)}{L_j(g)} \text{ trên } \bigcup_{k=1}^q f^{-1}(H_k) \setminus (f^{-1}(H_i) \cup f^{-1}(H_j)) \text{ với mọi } 1 \leq i < j \leq q.$$

Nếu  $q \geq 2n + 3$  thì

$$\frac{H_1(f)}{L_1(g)} \equiv \dots \equiv \frac{H_q(f)}{L_q(g)}$$

và tồn tại một phép biến đổi xạ ảnh  $\mathcal{L}$  từ  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  vào chính nó sao cho  $\mathcal{L}(f) \equiv g$  và  $\mathcal{L}(H_j) = L_j$  với mọi  $j \in \{1, \dots, q\}$ .

Mục tiêu của chúng tôi trong phần này là cải tiến và mở rộng kết quả trên đối với trường hợp các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ một đa tạp Kähler đầy vào không gian xạ ảnh. Hơn nữa, trong kết quả của chúng tôi, các điểm của ảnh ngược với bội vượt quá một số nhất định sẽ được bỏ qua. Kết quả chính của chúng tôi được phát biểu như sau.

**Định lý 4.3.1** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với hình cầu  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$ . Cho  $\{H_j\}_{j=1}^q$  và  $\{L_j\}_{j=1}^q$  ( $q \geq 2n + 2$ ) là hai họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và cho  $l_1, \dots, l_q$  là các số nguyên dương (có thể là  $+\infty$ ). Giả sử rằng  $q > n + 1 + \rho n(n + 1) + \frac{2nq}{q+2n-2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j+1}$  và*

$$a) \quad \min\{1, \nu_{H_j(f), \leq l_j}\} = \min\{1, \nu_{L_j(g), \leq l_j}\} \quad \text{với mọi } 1 \leq j \leq q,$$

$$b) \quad \dim \sup \nu_{H_i(f), \leq l_i} \cap \sup \nu_{H_j(f), \leq l_j} \leq m - 2 \quad \text{với mọi } 1 \leq i < j \leq q,$$

c)  $\frac{H_i(f)}{H_j(f)} = \frac{L_i(g)}{L_j(g)}$  trên  $\bigcup_{s=1}^q \sup \nu_{H_s(f), \leq l_s} \setminus (\sup \nu_{H_j(f)} \cup \sup \nu_{L_j(f)})$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ .

Khi đó tồn tại một phép biến đổi xạ ảnh  $\mathcal{L}$  từ  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  vào chính nó sao cho  $\mathcal{L}(g) \equiv f$  và siêu phẳng xác định bởi  $H_j$  là ảnh của siêu phẳng xác định bởi  $L_j$  qua ánh xạ  $\mathcal{L}$  với mọi  $j \in \{1, \dots, q\}$ .

Trong Định lý 4.3.1, nếu chúng ta giả sử thêm rằng có  $n + 1$  siêu phẳng  $H_{i_j}$  ( $1 \leq j \leq n + 1$ ) sao cho  $H_{i_j} \equiv L_{i_j}$ , thì phép biến đổi xạ ảnh  $\mathcal{L}$  phải là phép biến đổi đồng nhất, và do đó  $f \equiv g$ ,  $H_j \equiv L_j$  với mọi  $j = 1, \dots, q$ . Từ đó ta thu được Hệ quả 4.3.2 (xem Chương 4) cho ta kết luận  $f = g$  nếu có ít nhất  $n + 1$  siêu phẳng  $H_j \equiv L_j$ . Hệ quả này cũng tổng quát hóa và cải tiến tất cả các kết quả trước đó về tính duy nhất của các ánh xạ phân hình chia sẻ  $2n + 3$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát.

## Chương 2

# QUAN HỆ SỐ KHUYẾT KHÔNG LẤY TÍCH PHÂN CHO ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VÀ HỌ SIÊU PHẪNG Ở VỊ TRÍ DƯỚI TỔNG QUÁT

Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  trong  $\mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Trong chương này, chúng tôi sẽ thiết lập một quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính giao với một họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng thiết lập một quan hệ số khuyết cho các ánh xạ với họ mục tiêu là một siêu mặt duy nhất có dạng tổng của các siêu phẳng.

Do vậy, Chương 2 bao gồm hai mục. Mục đầu tiên cung cấp những kiến thức cơ bản về lý thuyết Nevanlinna cho các ánh xạ phân hình trên các hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$  và các bổ đề cần thiết để hỗ trợ để chứng minh định lý chính của chương (Định lý 2.2.1). Mục thứ hai trình bày chi tiết các chứng minh của Định lý 2.2.1. Đây là một định lý về số khuyết không lấy tích phân đối với các ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh và đa tạp xạ ảnh. Chương 2 được viết dựa trên phần lớn của bài báo [1] trong mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

### 2.1 Một số kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, chúng tôi bắt đầu bằng việc trình bày các khái niệm và kết quả quan trọng của lý thuyết Nevanlinna trên hình cầu, bao gồm các hàm cơ

bản, số khuyết cổ điển của Nevanlinna và khái niệm Wronskian của ánh xạ phân hình. Tiếp theo, chúng tôi trình bày khái niệm số khuyết không lấy tích phân cùng một số tính chất.

### a) Lý thuyết Nevalinna cho ánh xạ phân hình từ hình cầu trong $\mathbb{C}^m$ vào không gian xạ ảnh

Cho  $F$  là hàm chỉnh hình trên miền  $\Omega$  trong  $\mathbb{C}^m$ . Với mỗi bộ  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  gồm các số nguyên không âm, ta định nghĩa  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  và

$$\mathcal{D}^\alpha F = \frac{\partial^{|\alpha|} F}{\partial^{\alpha_1} z_1 \dots \partial^{\alpha_m} z_m}.$$

Ta xét ánh xạ  $\nu_F : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  được xác định bởi

$$\nu_F(z) := \max \{ l : \mathcal{D}^\alpha F(z) = 0 \text{ với mọi } \alpha \text{ thỏa mãn } |\alpha| < l \}, \text{ với } z \in \Omega.$$

Khi đó  $\nu_F$  được gọi là divisor (divisor không điểm) của hàm chỉnh hình  $F$ . Tổng quát, ta có khái niệm sau.

**Định nghĩa 2.1.1.** Một divisor  $\nu$  trên miền  $\Omega$  trong  $\mathbb{C}^m$  là một ánh xạ  $\nu : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$  sao cho, với mỗi điểm  $a \in \Omega$ , tồn tại các hàm chỉnh hình khác không  $F$  và  $G$  trên một lân cận liên thông  $U \subset \Omega$  của  $a$  sao cho  $\nu(z) = \nu_F(z) - \nu_G(z)$  với mỗi  $z \in U$  ngoài một tập con giải tích có chiều  $\leq m - 2$ .

Hai divisor được gọi là tương đương nếu chúng bằng nhau ngoài một tập con giải tích có chiều  $\leq m - 2$ . Đối với mỗi divisor  $\nu$  trên  $\Omega$ , ta định nghĩa  $\text{Supp } \nu := \overline{\{z : \nu(z) \neq 0\}}$ . Khi đó  $\text{Supp } \nu$  là tập con giải tích của  $\Omega$  có chiều thuần túy  $(m - 1)$  hoặc là một tập rỗng.

Cho  $\varphi$  là một hàm phân hình khác không trên miền  $\Omega$  trong  $\mathbb{C}^m$ . Với mỗi  $a \in \Omega$ , ta chọn các hàm chỉnh hình khác không  $F$  và  $G$  trên một lân cận  $U \subset \Omega$  sao cho  $\varphi = \frac{F}{G}$  trên  $U$  và

$$\dim(F^{-1}(0) \cap G^{-1}(0)) \leq m - 2.$$

Ta định nghĩa các divisor không điểm  $\nu_\varphi^0$ , divisor cực điểm  $\nu_\varphi^\infty$  và divisor  $\nu_\varphi$  sinh bởi  $\varphi$  lần lượt bởi

$$\nu_\varphi^0 := \nu_F, \quad \nu_\varphi^\infty := \nu_G \quad \text{và} \quad \nu_\varphi = \nu_\varphi^0 - \nu_\varphi^\infty.$$

Các định nghĩa này không phụ thuộc vào cách chọn các hàm  $F$  và  $G$ , và do đó các divisor này được định nghĩa trên toàn bộ miền  $\Omega$ .

Với  $z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ , ta đặt  $\|z\| = (|z_1|^2 + \dots + |z_m|^2)^{1/2}$ . Ta định nghĩa:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}^m(R) &:= \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| < R\}, \\ S(R) &:= \{z \in \mathbb{C}^m : \|z\| = R\} \quad (0 < R < \infty),\end{aligned}$$

và các dạng vi phân

$$v_{m-1}(z) := (dd^c \|z\|^2)^{m-1}, \sigma_m(z) := d^c \log \|z\|^2 \wedge (dd^c \log \|z\|^2)^{m-1} \text{ trên } \mathbb{C}^m \setminus \{0\}.$$

**Định nghĩa 2.1.2** (Hàm đếm). *Cho  $\nu$  là divisor trên hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Hàm đếm của  $\nu$  trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  được định nghĩa như sau:*

$$N(r, r_0, \nu) = \int_{r_0}^r \frac{n(t, \nu)}{t^{2m-1}} dt \quad (0 < r_0 < r < R).$$

với

$$n(t, \nu) = \begin{cases} \int_{|\nu| \cap \mathbb{B}(t)} \nu(z) v_{m-1} & \text{nếu } m \geq 2, \\ \sum_{|z| \leq t} \nu(z) & \text{nếu } m = 1. \end{cases}$$

Cho  $p$  là một số nguyên dương hoặc  $p = +\infty$ . Ta đặt  $\nu^{[p]} = \min\{p, \nu\}$  và định nghĩa

$$N^{[p]}(r, r_0, \nu) := N(r, r_0, \nu^{[p]}).$$

Với mỗi hàm phân hình khác không  $\varphi$  trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$ , ta đặt:

$$N_\varphi(r, r_0) = N(r, r_0, \nu_\varphi^0), \quad N_\varphi^{[p]}(r, r_0) = N(r, r_0, (\nu_\varphi^0)^{[p]}).$$

Để đơn giản, ta sẽ bỏ đi ký hiệu  $^{[p]}$  nếu  $p = \infty$ . Theo công thức Jensen, với  $0 < r_0 < r < R_0$ , ta có

$$N_\varphi(r, r_0) - N_{1/\varphi}(r, r_0) = \int_{S(r)} \log |\varphi| \sigma_n - \int_{S(r_0)} \log |\varphi| \sigma_n$$

Cho  $f : \mathbb{B}^m(R_0) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một ánh xạ phân hình với biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$ , trong đó mỗi  $f_i$  là hàm chỉnh hình trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  và  $f(z) = (f_0(z) : \dots : f_n(z))$  ngoài tập con giải tích  $\{f_0 = \dots = f_n = 0\}$  có đối chiều  $\geq 2$ . Đặt

$\|\tilde{f}\| = (|f_0|^2 + \dots + |f_n|^2)^{1/2}$ . Khi đó, kéo lùi bởi  $f$  của dạng Fubini-Study  $\Omega$  trên  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  được xác định bởi

$$\Omega_f = dd^c \log \|\tilde{f}\|^2.$$

**Định nghĩa 2.1.3** (Hàm đặc trưng). *Hàm đặc trưng của  $f$  được định nghĩa như sau.*

$$T_f(r) = \int_{r_0}^r \frac{dt}{t^{2m-1}} \int_{B(t)} f^* \Omega \wedge v^{m-1}, \quad (0 < r_0 < r < R_0).$$

Theo công thức Jensen, ta có

$$T_f(r, r_0) = \int_{S(r)} \log \|\tilde{f}\| \sigma_m - \int_{S(r_0)} \log \|\tilde{f}\| \sigma_m + O(1), \quad (\text{khi } r \rightarrow R_0).$$

Để đơn giản, trong suốt luận án này chúng tôi luôn chọn  $r_0$  là một số cố định sao cho  $0 < r_0 < R_0$  và ta sẽ viết  $N_\varphi(r), N_\varphi^{[p]}(r), T_f(r)$  thay cho  $N_\varphi(r, r_0), N_\varphi^{[p]}(r, r_0), T_f(r, r_0)$ .

Cho  $Q$  là một siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  có bậc  $d$ . Gọi  $P$  là một đa thức thuần nhất bậc trong  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  xác định  $Q$ . Khi đó,  $P$  có dạng

$$P(x_0, \dots, x_n) = \sum_{I \in \mathcal{T}_d} a_I x^I, \quad a_I \in \mathbb{C},$$

trong đó  $\mathcal{T}_d = \{(i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}; i_0 + \dots + i_n = d\}$ ,  $x^I = x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n}$  với mỗi  $I = (i_0, \dots, i_n) \in \mathcal{T}_d$  và  $a_I$  là các hằng số không đồng thời bằng không, và thỏa mãn

$$Q = \{(x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}); P(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Ta đặt  $P(\tilde{f}) = P(f_0, \dots, f_n)$ . Trong trường hợp  $d = 1$ , ta gọi  $Q$  là siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và có thể chọn  $P$  là một dạng tuyến tính khác không.

**Định nghĩa 2.1.4** (Hàm xấp xỉ). *Hàm xấp xỉ của  $f$  tương ứng đối với  $Q$ , ký hiệu là  $m_f(r, r_0, Q)$ , được định nghĩa bởi*

$$m_f(r, r_0, Q) = \int_{S(r)} \log \frac{\|\tilde{f}\|^d}{|P(\tilde{f})|} \sigma_m - \int_{S(r_0)} \log \frac{\|\tilde{f}\|^d}{|P(\tilde{f})|} \sigma_m.$$

Định nghĩa trên không phụ thuộc vào việc chọn biểu diễn rút gọn  $\tilde{f}$  của  $f$  cũng như việc chọn đa thức xác định  $P$ .

Mặt khác, chú ý rằng hàm  $P(\tilde{f})$  phụ thuộc vào việc chọn biểu diễn rút gọn của  $f$  và đa thức xác định  $P$ . Tuy nhiên, divisor không điểm của hàm  $P(\tilde{f})$  không phụ thuộc vào những lựa chọn này. Ta có thể thấy rằng  $\nu_{P(\tilde{f})}^0(z)$  chính là bội giao của ảnh của  $f$  với siêu phẳng  $Q$  tại điểm  $f(z)$ . Do vậy, ta kí hiệu divisor này là  $\nu_{Q(f)}$ . Với mỗi số nguyên dương  $\mu_0$  (hoặc  $+\infty$ ), hàm đếm các giao điểm của siêu mặt  $Q$  và ảnh của  $f$  chặn bởi  $\mu_0$  được cho bởi

$$N_{Q(f)}^{[\mu_0]}(r, r_0) = N_{P(\tilde{f})}^{[\mu_0]}(r, r_0), \quad (0 < r_0 < r < R_0).$$

Cũng theo công thức Jensen, ta có

$$N_{Q(f)}(r, r_0) = \int_{S(r)} \log|Q(\tilde{f})| \sigma_m - \int_{S(r_0)} \log|Q(\tilde{f})| \sigma_m.$$

Để đơn giản, ta cũng viết  $m_f(r, Q), N_{Q(f)}^{[\mu_0]}(r)$  thay cho  $m_f(r, r_0, Q), N_{Q(f)}^{[\mu_0]}(r, r_0)$ . Kho đó, định lý cơ bản thứ nhất trong lý thuyết Nevanlinna trên hình cầu được phát biểu như sau:

$$dT_f(r) = m_f(r, Q) + N_{Q(f)}(r) + O(1), \quad (r_0 < r < R),$$

trong đó  $O(1)$  là đại lượng bị chặn và không phụ thuộc vào  $f$ .

## **b) Tính suy biến của ánh xạ phân hình từ đa tạp phức vào đa tạp xạ ảnh**

Cho  $M$  là một đa tạp phức  $m$  chiều. Cho  $f$  là ánh xạ phân hình từ  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .

**Định nghĩa 2.1.5** (Không suy biến tuyến tính). *Ánh xạ phân hình  $f$  được gọi là không suy biến tuyến tính nếu ảnh của  $f$  không nằm trong bất kỳ siêu phẳng nào của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ .*

Với một điểm  $p \in M$ , giả sử  $f$  có một biểu diễn địa phương trên một lân cận xung quanh điểm  $p$  là  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$ . Ta gọi  $\mathcal{M}_p$  là trường của tất cả các mầm của các hàm phân hình tại  $p$ . Với mỗi  $k \geq 0$ , ký hiệu  $\mathcal{F}_p^k$  là  $\mathcal{M}_p$ -module con của  $\mathcal{M}_p^{k+1}$  được sinh bởi tất cả các phân tử  $\left( \frac{\partial^{|\alpha|} f_0}{\partial z^\alpha}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} f_n}{\partial z^\alpha} \right)$  với  $|\alpha| \leq k$ , trong đó  $z = (z_1, \dots, z_m)$  là một hệ tọa độ chỉnh hình địa phương quanh  $p$  và  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$  với  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ . Khi đó, ta thấy rằng

$$\mathcal{F}_p^0 \subset \mathcal{F}_p^{(1)} \subset \dots \subset \mathcal{F}_p^{(k)} \subset \dots$$

Chúng tôi định nghĩa:

$$\begin{aligned} \text{rank}_f(k) &:= \text{rank}_{\mathcal{M}_p} \mathcal{F}_p^{(k)} - \text{rank}_{\mathcal{M}_p} \mathcal{F}_p^{(k-1)} \quad (k \geq 1), \text{rank}_f(0) = 1, \\ r_f &:= \max\{k \geq 0 ; \text{rank}_f(k) > 0\}, \\ l_f &:= \sum_{k \geq 1} k \text{rank}_f(k), \\ m_f &:= \sum_{k,l} (k-l)^+ \min \left\{ {}_{n-1}H_l, \left( r_f(k) - \sum_{\lambda=0}^{l-1} {}_{n-1}H_\lambda \right)^+ \right\}, \end{aligned}$$

trong đó  $x^+ = \max\{0, x\}$  với mỗi số thực  $x$ , và  ${}_{n-1}H_\lambda$  là tổ hợp chập  $\lambda$  của  $n-1$  phần tử. Theo H. Fujimoto [16], các định nghĩa  $\text{rank}_f(k), l_f, r_f, m_f$  không phụ thuộc vào việc chọn điểm  $p$ , chọn biểu diễn rút gọn địa phương  $\tilde{f}$  và chọn tọa độ chỉnh hình  $z$ . Chúng tôi cũng có các khẳng định sau:

- $r_f \leq n, 0 \leq m_f \leq l_f \leq \frac{n(n+1)}{2}$ .
- $f$  là không suy biến tuyến tính nếu và chỉ nếu  $\text{rank}_{\mathcal{M}_p} \mathcal{F}_p^{(r_f)} = n+1$ .

Do đó, nếu  $f$  là không suy biến tuyến tính thì tồn tại một “tập các đa chỉ số chấp nhận được”

$$\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n), \text{ trong đó } \alpha_i = (\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{im}) \in \mathbb{N}^m,$$

sao cho:

- (i)  $|\alpha_i| \leq k$  với mọi  $0 \leq i \leq \text{rank}_{\mathcal{M}_p} \mathcal{F}_p^{(k)} - 1$  và

$$\left\{ \left( \frac{\partial^{|\alpha_i|} f_0}{\partial z^{\alpha_i}}, \dots, \frac{\partial^{|\alpha_i|} f_n}{\partial z^{\alpha_i}} \right) ; 0 \leq i \leq \text{rank}_{\mathcal{M}_p} \mathcal{F}_p^{(k)} - 1 \right\}$$

lập thành một cơ sở của  $\mathcal{F}_p^{(k)}$  trên  $\mathcal{M}_p$ .

- (ii)  $W_\alpha(\tilde{f}) := \det \left( \frac{\partial^{|\alpha_i|} f}{\partial z^{\alpha_i}} \right)_{0 \leq i, j \leq n} \neq 0$ .

- (iii)  $W_\alpha(h\tilde{f}) = h^{n+1} W_{\alpha_0, \dots, \alpha_n}(f_0, \dots, f_n)$  với bất kỳ hàm phân hình  $h$  không bằng không.

Hàm  $W_\alpha(\tilde{f})$  được gọi là Wronskian tổng quát của ánh xạ  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  (hoặc Wronskian tổng quát địa phương của  $f$ ). Chúng tôi lưu ý rằng  $\sum_{i=0}^n |\alpha_i| = l_f$ .

Cuối cùng ta có định nghĩa về ánh xạ không suy biến đại số như sau.

**Định nghĩa 2.1.6** (Không suy biến tuyến tính). Cho  $f$  là ánh xạ phân hình từ đa tạp phức  $M$  vào một đa tạp xạ ảnh con  $V$  của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Ánh xạ  $f$  được nói là không suy biến đại số nếu ảnh của nó không được chứa trong một tập con đại số thực sự của  $V$ .

**c) Số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình**

Cho  $f : \mathbb{B}^m(R_0) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một ánh xạ phân hình, và  $Q$  là một siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với bậc  $d$  sao cho ảnh của  $f$  không được chứa trong  $Q$ . Từ định lý cơ bản thứ nhất, ta có bất đẳng thức

$$\| N_{Q(f)}(r) \leq dT_f(r) + O(1) \quad (0 < r_0 < r < R),$$

trong đó  $O(1)$  là một đại lượng bị chặn không phụ thuộc vào  $f$ .

**Định nghĩa 2.1.7.** Số khuyết cổ điển Nevanlinna của ánh xạ  $f$  đối với siêu mặt  $Q$  với bội được chặn bởi  $\mu_0$  được định nghĩa như sau:

$$\delta_{f,*}^{[\mu_0]}(Q) = 1 - \limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{N_{Q(f)}^{[\mu_0]}(r)}{dT_f(r)}.$$

Tương ứng với ký hiệu của hàm đếm, trong trường hợp  $\mu_0 = +\infty$ , ta sẽ viết  $\delta_{f,*}(Q)$  thay cho  $\delta_{f,*}^{[+\infty]}(Q)$ . Dựa trên định nghĩa số khuyết và bất đẳng thức trên, ta có các bất đẳng thức sau:

$$0 \leq \delta_{f,*}(Q) \leq \delta_{f,*}^{[\mu_0+1]}(Q) \leq \delta_{f,*}^{[\mu_0]}(Q) \leq 1.$$

Tiếp theo ta xét  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có chiều  $m$  với dạng Kähler  $\omega$ . Giả sử  $f : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là ánh xạ phân hình. Ta kí hiệu  $\Omega_f$  là kéo lùi của dạng Fubini-Study  $\Omega$  trên  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  bởi ánh xạ  $f$ . Trên  $M$ , với biểu diễn địa phương của dạng Kähler cho bởi  $\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i,j} h_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ , ta định nghĩa dạng Ricci của  $\omega$  bởi

$$\text{Ric } \omega = dd^c \log (\det (h_{i\bar{j}})).$$

với  $d = \partial + \bar{\partial}$  và  $d^c = \frac{\sqrt{-1}}{4\pi}(\bar{\partial} - \partial)$ .

**Định nghĩa 2.1.8.** Với mỗi số thực không âm  $\rho \geq 0$ , ta nói rằng ánh xạ  $f$  thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  nếu tồn tại một hàm giá trị thực  $h$  khác không, liên tục và bị chặn trên  $M$  sao cho

$$\rho \Omega_f + dd^c \log h^2 \geq \text{Ric } \omega.$$

**Định nghĩa 2.1.9.** Cho một số nguyên dương  $\mu_0$  và một siêu mặt  $Q$  bậc  $d$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  sao cho  $f(M) \not\subset Q$ . Ký hiệu  $\nu_{Q(f)}(p)$  là bội giao của ảnh của  $f$  và  $Q$  tại  $f(p)$ . Số khuyết không lấy tích phân của  $f$  đối với siêu mặt  $Q$ , với bội được chặn đến bậc  $\mu_0$ , ký hiệu là  $\delta_f^{[\mu_0]}(Q)$ , được định nghĩa như sau:

$$\delta_f^{[\mu_0]}(Q) := 1 - \inf\{\eta \geq 0 \mid \eta \text{ thỏa mãn điều kiện } (*)\}.$$

Ở đây, điều kiện  $(*)$  có nghĩa là tồn tại hàm không âm liên tục, bị chặn trên  $M$ , và có bội không nhỏ hơn  $\min\{\nu_{Q(f)}, \mu_0\}$ , sao cho

$$d\eta\Omega_f + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log h^2 \geq [\min\{\nu_{Q(f)}, \mu_0\}],$$

với  $[\nu]$  là ký hiệu của dòng kiểu  $(1,1)$  sinh bởi divisor  $\nu$ .

Tương tự như số khuyết cổ điển của Nevanlinna, số khuyết không lấy tích phân có các tính chất sau:

- $0 \leq \delta_f^{[\mu_0]}(Q) \leq 1$ .
- Nếu  $f(M) \cap Q = \emptyset$  thì  $\delta_f^{[\mu_0]}(Q) = 1$ .
- Nếu tồn tại một số nguyên dương  $\mu_0$  sao cho  $\nu_f(Q)(p) \geq \mu$  với mọi  $p \in f^{-1}(Q)$  và  $\mu \geq \mu_0$ , thì  $\delta_f^{[\mu_0]}(Q) \geq 1 - \frac{\mu_0}{\mu}$ .

Khi  $M = \mathbb{B}(R_0)$ , mối quan hệ giữa số khuyết cổ điển của Nevanlinna và số khuyết không lấy tích phân được cho qua mệnh đề sau.

**Mệnh đề 2.1.10.** Nếu  $\lim_{r \rightarrow R_0} T_f(r, r_0) = \infty$ , thì ta có

$$0 \leq \delta_f^{[\mu_0]}(Q) \leq \delta_{f,*}^{[\mu_0]}(Q) \leq 1.$$

## 2.2 Quan hệ số khuyết không lấy tích phân với họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh một quan hệ số khuyết cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler đầy vào không gian xạ ảnh với họ mục tiêu là các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh định lý sau.

**Định lý 2.2.1.** Cho  $\{H_i\}_{i=1}^q$  là các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ( $q > 2N - n + 1$ ) ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát ( $N \geq n$ ). Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy  $m$  chiều có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Cho  $f$  là một ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $D = H_1 + \cdots + H_q$  (như một divisor). Với một số  $\rho \geq 0$ , nếu  $f$  thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$  thì ta có

$$(a) \quad \delta_f^{[m_f]}(D) \leq 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(2N - n + 1)}{q(n + 1)} + 2\rho \frac{l_f}{q},$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i) \leq 2N - n + 1 + 2\rho \frac{(2N - n + 1)l_f}{n + 1}.$$

**Nhận xét:**

(1) Bằng tính toán đơn giản, ta có

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \nu_f^{[r_f]}(H_i) \leq \nu_f^{[m_f]}(D) \leq \sum_{i=1}^q \nu_f^{[m_f]}(H_i),$$

và các bất đẳng thức này trở thành đẳng thức trong những trường hợp rất nghiêm ngặt (ví dụ: mọi giao điểm  $f^{-1}(H_i) \cap f^{-1}(H_j)$  đều có đối chiều ít nhất là hai). Điều này dẫn đến

$$\frac{1}{Nq} \sum_{i=1}^q (1 - \delta_f^{[r_f]}(H_i)) \leq 1 - \delta_f^{[m_f]}(D) \leq \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q (1 - \delta_f^{[m_f]}(H_i)),$$

tức là,

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^q \delta_f^{[m_f]}(H_i) + \frac{q(N - 1)}{N} \geq q\delta_f^{[m_f]}(D) \geq \sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i).$$

Do đó, mệnh đề (a) không suy ra mệnh đề (b) và ngược lại.

(2) Nếu  $f$  không suy biến vi phân, tức là ma trận Jacobi của  $f$  có hạng  $n$  tại một điểm nào đó, thì  $r_f = 1$  và  $l_f = n, m_f = 1$ . Do đó, ta có hệ quả sau.

**Hệ quả 2.2.2.** Với giả thiết của Định lý 2.2.1 và giả thiết thêm rằng  $f$  không suy biến vi phân, ta có:

$$(a) \quad \delta_f^{[1]}(D) = \frac{2(N - n)}{2N - n + 1} + \frac{n + 1}{q} + \frac{2l_f}{q}\rho,$$

$$(b) \quad \sum_{i=1}^q \delta_f^{[1]}(H_i) \leq 2N + n - 1 + \frac{2n(2N - n + 1)}{n + 1}\rho.$$

Chúng tôi lưu ý rằng, với giả thiết của Hệ quả 2.2.2, trong [12] S. D. Quang và D. D. Thái đã chỉ ra rằng

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[1]}(H_i) \leq 2N + n - 1 + 2\rho(2N - n + 1).$$

Do đó, Hệ quả 2.2.2(b) là một sự cải tiến của kết quả trong [12].

Để chứng minh Định lý 2.2.1, chúng tôi cần một số kết quả bổ trợ sau. Đầu tiên, chúng tôi có mệnh đề về tích phân của hàm phụ trợ được cho bởi H. Fujimoto [17] (sau này được chứng minh lại bởi M. Ru và S. Sogome [10]).

**Mệnh đề 2.2.3** (xem [17, Proposition 6.1] và [10, Proposition 3.3]). *Cho  $f$  là ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  và giả sử  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  là họ đa chỉ số chấp nhận được của  $f$ . Gọi  $H_0, \dots, H_n$  là  $n+1$  siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Cho các số thực  $t, p$  với  $0 < t l_f < p < 1$ . Khi đó, với  $0 < r_0 < R_0$ , tồn tại một hằng số dương  $K$  sao cho với mọi  $r_0 < r < R < R_0$ , ta có*

$$\int_{S(r)} \left| z^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \frac{W_\alpha(\tilde{f})}{H_0(\tilde{f}) \dots H_n(\tilde{f})} \right|^t \sigma_m \leq K \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} T_f(R) \right)^p.$$

Ở đây  $z^a = z_1^{a_1} \dots z_m^{a_m}$  với  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m$ .

Xét hàm phụ trợ  $\Phi := \frac{W_\alpha(\tilde{f})}{H_0(\tilde{f}) \dots H_n(\tilde{f})}$ . Ta có bổ đề sau đây về đánh giá divisor cực điểm của hàm  $\Phi$ .

**Bổ đề 2.2.4** (xem [16, Lemma 3.4]).  $\nu_\Phi^\infty(p) \leq m_f$  với mọi  $p$  thuộc  $\mathbb{B}^m(R_0)$  ngoài một tập con giải tích có đối chiều 2.

Chúng tôi nhắc lại bổ đề sau đây về trọng Nochka của họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.

**Bổ đề 2.2.5** (xem [34, Lemma 3.3 và Lemma 3.4]). *Cho  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát, với  $q > 2N - n + 1$ . Khi đó, tồn tại các hằng số hữu tỷ dương  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) thỏa mãn các điều sau:*

- i)  $0 < \omega_i \leq 1, \forall i \in \{1, \dots, q\}$ ,
- ii) Đặt  $\tilde{\omega} = \max_{j \in Q} \omega_j$ , ta có

$$\sum_{j=1}^q \omega_j = \tilde{\omega}(q - 2N + n - 1) + n + 1.$$

$$iii) \frac{n+1}{2N-n+1} \leq \tilde{\omega} \leq \frac{n}{N}.$$

iv) Cho  $E_i \geq 1$  ( $1 \leq i \leq q$ ) là các số cho trước. Đối với  $R \subset \{1, \dots, q\}$  với  $\sharp R = N+1$ , tồn tại một tập con  $R^o \subset R$  sao cho  $\sharp R^o = \text{rank} \{H_i\}_{i \in R^o} = n+1$  và

$$\prod_{i \in R} E_i^{\omega_i} \leq \prod_{i \in R^o} E_i.$$

Các hằng số  $\omega_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) được gọi là các trọng Nochka của họ siêu phẳng  $H_1, \dots, H_q$  và hằng số  $\tilde{\omega}$  được gọi là hằng số Nochka của họ siêu phẳng này. Tiếp theo, chúng tôi chứng minh Định lý 2.2.1.

**Chứng minh Định lý 2.2.1.** Bằng cách sử dụng phủ phổ dụng nếu cần thiết, ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp  $M$  là hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  của  $\mathbb{C}^m$ . Gọi  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq q}$  là các trọng Nochka của họ siêu phẳng  $H_1, \dots, H_q$  và gọi  $\tilde{\omega}$  là hằng số Nochka của họ này. Chúng tôi giả sử rằng  $f$  có một biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  và mỗi  $H_i$  được xác định bởi một dạng tuyến tính (cũng kí hiệu là  $H_i$ ) có dạng

$$H_i(x_0, \dots, x_n) = a_{i0}x_0 + \dots + a_{in}x_n = 0 \quad (1 \leq i \leq q),$$

với  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  và  $\sum_{j=0}^n |a_{ij}|^2 = 1$  ( $1 \leq i \leq q$ ). Khi đó

$$H_i(\tilde{f}) = a_{i0}f_0 + \dots + a_{in}f_n.$$

Vì  $f$  là không suy biến tuyến tính nên tồn tại họ đa chỉ số chấp nhận được  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$  của  $\tilde{f}$  sao cho

$$W_\alpha(\tilde{f}) := \det \left( \frac{\partial^{|\alpha_i|} f_j}{\partial z^{\alpha_i}}; 0 \leq i, j \leq n \right) \neq 0. \quad (2.1)$$

Với mỗi  $R^o = \{r_1^o, \dots, r_{n+1}^o\} \subset \{1, \dots, q\}$  sao cho  $\text{rank} \{H_i\}_{i \in R^o} = \sharp R^o = n+1$ , ta đặt

$$W_{R^o} \equiv \det \left( \frac{\partial^{|\alpha_i|} H_{r_j^o}(\tilde{f})}{\partial z^{\alpha_i}}; 0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n+1 \right).$$

Vì  $\text{rank} \{H_{r_j^o} (1 \leq j \leq n+1)\} = n+1$  nên tồn tại một hằng số khác không  $C_{R^o}$  sao cho  $W_{R^o} = C_{R^o} \cdot W_\alpha(\tilde{f})$ .

Gọi  $\mathcal{R}^o$  là tập hợp tất cả các tập con  $R^o$  của  $\{1, \dots, q\}$  sao cho  $\text{rank} \{H_i\}_{i \in R^o} = \sharp R^o = n+1$ .

Xét một điểm  $z$  cố định trong  $\mathbb{B}^m(R_0)$ . Chúng tôi có thể giả sử rằng

$$|H_{i_1}(\tilde{f})(z)| \leq |H_{i_2}(\tilde{f})(z)| \leq \cdots \leq |H_{i_q}(\tilde{f})(z)|$$

với một hoán vị  $(i_1, \dots, i_q)$  của  $\{1, \dots, q\}$ . Đặt  $R = \{i_1, \dots, i_{N+1}\}$  và chọn  $R^o \subset R$  sao cho  $R^o \in \mathcal{R}^o$  và  $R^o$  thỏa mãn bổ đề 2.2.5 iv) với các số  $\left\{ \frac{\|\tilde{f}(z)\|}{|H_i(\tilde{f})(z)|} \right\}_{i=1}^q$ . Ta lưu ý rằng

$$\|\tilde{f}(z)\| \leq C \max_{i \in R} |H_i(\tilde{f})(z)| \leq C |H_j(\tilde{f})(z)| \quad \forall j \notin R,$$

với  $C$  là một hằng số dương được chọn không phụ thuộc vào  $z$  và  $R$ . Do vậy, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\|\tilde{f}(z)\|^{(\sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1)} |W_\alpha(\tilde{f})(z)|}{|H_1(\tilde{f})(z)|^{\omega_1} \cdots |H_q(\tilde{f})(z)|^{\omega_q}} &\leq \frac{C^{q-N-1} |W_\alpha(\tilde{f})(z)|}{\|\tilde{f}(z)\|^{n+1}} \prod_{i \in R} \left( \frac{\|\tilde{f}(z)\|}{|H_i(\tilde{f})(z)|} \right)^{\omega_i} \\ &\leq K \frac{|W_{R^o}(z)| \cdot \|\tilde{f}(z)\|^{(n+1)}}{\|\tilde{f}(z)\|^{(n+1)} \cdot \prod_{i \in R^o} |H_i(\tilde{f})(z)|} \\ &= K \frac{|W_{R^o}(z)|}{\prod_{i \in R^o} |H_i(\tilde{f})(z)|}, \end{aligned}$$

trong đó  $K$  là một hằng số dương, được chọn không phụ thuộc vào  $z$ ,  $R$  và  $R^o$ . Vì  $\sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1 = \tilde{\omega}(q - 2N + n - 1)$  nên ta suy ra

$$\frac{\|\tilde{f}(z)\|^{\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} |W_\alpha(\tilde{f})(z)|}{|H_1(\tilde{f})(z)|^{\omega_1} \cdots |H_q(\tilde{f})(z)|^{\omega_q}} \leq K \sum_{R^o \in \mathcal{R}^o} S_{R^o}(z), \quad (2.2)$$

trong đó  $S_{R^o} = \frac{|W_{R^o}|}{\prod_{i \in R^o} |H_i(\tilde{f})|}$ .

a) Chúng tôi chứng minh mệnh đề (a) của định lý. Đầu tiên, ta chứng minh khẳng định sau đây.

**Khẳng định 1.**  $\sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})} - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})} \leq \nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}$  với  $\nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}$  là divisor không điểm được chặn bởi  $m_f$  của hàm chỉnh hình  $\prod_{i=1}^q H_i(\tilde{f})$ .

Thật vậy, giả sử rằng  $z$  là không điểm của một số hàm  $H_i(\tilde{f})$  và  $z$  nằm ngoài tập không xác định  $I(f)$  của  $f$ . Vì  $\{H_i\}_{i=1}^q$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát nên  $z$  không phải là điểm không của nhiều hơn  $N$  hàm  $H_i(\tilde{f})$ . Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $z$  không phải là điểm không của  $H_i(\tilde{f})$  với mọi  $i > N$ . Đặt  $R = \{1, \dots, N+1\}$ . Chọn  $R^1 \subset R$  sao cho

$$\#R^1 = \text{rank} \{H_i\}_{i \in R^1} = n+1$$

và  $R^1$  thỏa mãn Bổ đề 2.2.5 iv) với các số  $\{e^{\nu_{H_i(\tilde{f})}(z)}\}_{i=1}^q$ . Từ Bổ đề 2.2.4 và Bổ đề 2.2.5 iv), ta có

$$m_f \geq \sum_{i \in R^1} \nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})}(z) \geq \sum_{i \in R} \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})}(z).$$

Do đó,

$$\sum_{i \in R} \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})}(z) \leq \min\{m_f, \nu_{\prod_{i=1}^q H_i(\tilde{f})}(z)\} = \nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}(z).$$

Vậy khẳng định được chứng minh.

Chúng tôi xem xét hai trường hợp sau đây:

**Trường hợp a.1:**  $M = \mathbb{C}^m$ . Bằng cách tích phân hai vế của bất đẳng thức (2.2) và sử dụng bổ đề về đạo hàm logarithm, chúng tôi có:

$$\| \tilde{\omega}(q - 2N + n - 1)T_f(r) + N_{W_\alpha(\tilde{f})}(r) - \sum_{i=1}^q \omega_i N_{H_i(\tilde{f})}(r) \leq o(T_f(r)).$$

Ở đây, ký hiệu “ $\|$ ” có nghĩa là bất đẳng thức đúng cho mọi  $r \in [1, +\infty)$  ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Do đó,

$$\| (q - 2N + n - 1)T_f(r) \leq \frac{1}{\tilde{\omega}} \left( \sum_{i=1}^q \omega_i N_{H_i(\tilde{f})}(r) - N_{W_\alpha(\tilde{f})}(r) \right) + o(T_f(r)). \quad (2.3)$$

Từ Khẳng định 1, chúng tôi có “*định lý chính thứ hai*” như sau:

$$\begin{aligned} \| (q - 2N + n - 1)T_f(r) &\leq \frac{1}{\tilde{\omega}} N_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}(r) + o(T_f(r)) \\ &\leq \frac{2N - n + 1}{n + 1} N_{D(f)}^{[m_f]}(r) + o(T_f(r)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

Tức là,

$$\| \left( qT_f(r) - N_{D(f)}^{[m_f]}(r) \right) \leq \left( 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(n + 1)}{(2N - n + 1)q} \right) qT_f(r) + o(T_f(r)).$$

Điều này kéo theo rằng

$$\delta_f^{[m_f]}(D) \leq 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(n + 1)}{(2N - n + 1)q}$$

và chúng tôi đã có được quan hệ số khuyết mong muốn trong trường hợp này.

**Trường hợp a.2:**  $M = \mathbb{B}^m(R_0)$  ( $R_0 < +\infty$ ). Không mất tính tổng quát, chúng tôi giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Giả sử phản chứng rằng

$$\begin{aligned}\delta_f^{[m_f]}(D) &> 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(n + 1)}{(2N - n + 1)q} + 2\rho \frac{l_f}{q} \\ &\geq 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)\tilde{\omega}}{q} + 2\rho \frac{l_f}{q}.\end{aligned}$$

Khi đó, tồn tại một hằng số  $\eta > 0$  và một hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\tilde{u}$  sao cho  $e^{\tilde{u}}|\varphi| \leq \|\tilde{f}\|^{q\eta}$ , trong đó  $\varphi$  là một hàm chỉnh hình với  $\nu_\varphi = \nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}$  và

$$1 - \eta > 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)\tilde{\omega}}{q} + 2\frac{l_f\rho}{q},$$

tức là,

$$(q - 2N + n - 1)\tilde{\omega} - q\eta > 2l_f\rho.$$

Đặt  $u = \tilde{u} + \log|\varphi|$ , thì  $u$  là một hàm đa điều hòa dưới và  $e^u \leq \|\tilde{f}\|^{q\eta}$ . Đặt

$$v(z) = \log \frac{|z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})(z)|}{|H_1(\tilde{f})(z)|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})(z)|^{\omega_q}} + u.$$

Ta có bất đẳng thức dòng sau đây:

$$2dd^c[v] \geq [\nu_{W_\alpha(\tilde{f})}] - \sum_{j=1}^q \omega_j [\nu_{H_j(\tilde{f})}] + 2dd^c[u] \geq -[\nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}] + [\nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}] = 0$$

(bất đẳng thức cuối cùng có được nhờ Bổ đề 2.2.4). Điều này cho thấy  $v$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(1)$ .

Ta viết dạng metric Kähler đã cho dưới dạng

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j} g_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Khi đó, dạng thể tích trên  $B(1)$  được cho bởi

$$dV := c_m \det(g_{i\bar{j}}) v_m$$

với  $c_m$  là một hằng số dương. Theo giả thiết  $f$  thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$  thì tồn tại một hàm  $h$  liên tục không âm, bị chặn trên  $M$  sao cho

$$\rho\Omega_f + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial} \log h^2 \geq \text{Ric } \omega.$$

Do đó, tồn tại một hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\xi \not\equiv \infty$  trên  $M$  sao cho

$$e^\xi dV \leq \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m.$$

Đặt

$$t := \frac{2\rho}{\tilde{\omega}(q - 2N + n - 1) - q\eta} > 0$$

và

$$\lambda(z) := \frac{|z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})(z)|}{|H_1(\tilde{f})(z)|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})(z)|^{\omega_q}}.$$

Chúng tôi thấy rằng

$$tl_f < l_f \cdot \frac{2\rho}{2\rho l_f} = 1,$$

và hàm  $\zeta = \xi + tv$  là đa điều hòa dưới trên đa tạp Kähler  $M$ . Chọn một số dương  $p$  sao cho  $0 < tl_f < p < 1$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} e^\zeta dV &= e^{\xi + tv} dV \leq e^{tv} \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m = \lambda^t e^{tu} \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m \\ &\leq \lambda^t \|\tilde{f}\|^{2\rho + tq\eta} v_m = \lambda^t \|\tilde{f}\|^{t\tilde{\omega}(q - 2N + n - 1)} v_m \end{aligned}$$

Vì  $\sum_{j=1}^q \omega_j = \tilde{\omega}_j(q - 2N + n - 1) + n + 1$  nên từ bất đẳng thức trên ta suy ra rằng

$$e^\zeta dV \leq \lambda^t \|\tilde{f}\|^{t(\sum_{j=1}^q \omega_j - n - 1)} v_m.$$

Tích phân cả hai vế của bất đẳng thức trên trên  $\mathbb{B}^m(1)$ , chúng tôi có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^m(1)} e^\zeta dV &\leq \int_{\mathbb{B}^m(1)} \lambda^t \|\tilde{f}\|^{t(\sum_{j=1}^q \omega_j - n - 1)} v_m \\ &= 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} (\lambda \|\tilde{f}\|^{(\sum_{j=1}^q \omega_j - n - 1)})^t \sigma_m \right) dr \\ &\leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \sum_{R^o \in \mathcal{R}^o} |z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} K S_{R^o}|^t \sigma_m \right) dr, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\text{với } S_{R^o} = \frac{|W_{R^o}|}{\prod_{i \in R^o} |H_i(\tilde{f})|}.$$

Ta xét hai trường hợp nhỏ sau:

**Trường hợp a.2.1:** Giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{T_f(r)}{\log 1/(1-r)} < \infty.$$

Chọn  $p > 0$  sao cho  $tl_f < p < 1$ . Lưu ý rằng  $\sum_{i=0}^n |\alpha_i| = l_f$ . Theo bổ đề về đạo hàm logarithm thì tồn tại một hằng số dương  $K'$  sao cho: với mọi  $0 < r_0 < r < r' < 1$ , ta có

$$\int_{S(r)} |z^{\alpha_0+\dots+\alpha_n} K S_{R^0}(z)|^t \sigma_m \leq K' \left( \frac{r'^{2m-1}}{r'-r} T_f(r') \right)^p \quad (2.6)$$

ngoài một tập con  $E \subset [0, 1]$  với  $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$ . Chọn  $r' = r + \frac{1-r}{eT_f(r)}$ , ta có

$$T_f(r') \leq 2T_f(r).$$

Do đó, bất đẳng thức trên suy ra rằng

$$\sum_{R^0 \in \mathcal{R}^0} \int_{S(r)} |z^{\alpha_0+\dots+\alpha_n} K S_{R^0}(z)|^t \sigma_m \leq \frac{K''}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p}$$

với mọi  $r \in (0, 1)$  nằm ngoài  $E$ , trong đó  $K''$  là một hằng số dương. Bằng cách chọn  $K''$  đủ lớn, chúng tôi có thể giả sử rằng bất đẳng thức trên đúng với mọi  $r \in (0, 1)$ . Khi đó, bất đẳng thức (2.5) kéo theo

$$\int_{\mathbb{B}^m(1)} e^u dV \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K''}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p} dr < +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với các kết quả của S.T. Yau [35] và L. Karp [36]. Do đó, giả sử phản chứng là sai và chúng tôi phải có

$$\delta_f^{[m_f]}(D) \leq 1 - \frac{(q-2N+n-1)(n+1)}{(2N-n+1)q} + 2\rho \frac{l_f}{q}.$$

Vậy mệnh đề (a) được chứng minh trong trường hợp nhỏ này.

**Trường hợp a.2.2:** Giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{T(r)}{\log 1/(1-r)} = \infty.$$

Chúng tôi chỉ cần chứng minh định lý sau.

**Định lý 2.2.6.** Với giả thiết của Định lý 2.2.1 và giả sử rằng  $M = \mathbb{B}(1)$ . Khi đó, chúng tôi có

$$\begin{aligned} \left( qT_f(r) - N_{(f,D)}^{[m_f]}(r) \right) &\leq \left( 1 - \frac{(q-2N+n-1)(n+1)}{(2N-n+1)q} \right) qT_f(r) \\ &\quad + K'' \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1), \end{aligned}$$

trong đó  $K''$  là một hằng số dương, với mọi  $0 < r_0 < r < 1$  ngoài một tập  $E \subset [0, 1]$  với  $\int_E \frac{dt}{1-t} < \infty$ .

*Chứng minh.* Lập lại lập luận trên, chúng tôi có

$$\int_{S(r)} \frac{\|\tilde{f}\|^{(\sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1)} |z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})|}{|H_1(\tilde{f})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})|^{\omega_q}} \sigma_m \leq K \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} T_f(R) \right)^p$$

với mọi  $0 < r_0 < r < R < 1$ . Sử dụng tính lồi của hàm logarithm, ta có

$$\begin{aligned} & \int_{S(r)} \log |z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}| \sigma_m + \left( \sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1 \right) \int_{S(r)} \log \|\tilde{f}\| \sigma_m + \int_{S(r)} \log |W_\alpha(\tilde{f})| \sigma_m \\ & - \sum_{j=1}^q \omega_j \int_{S(r)} \log |H_j(\tilde{f})| \sigma_m \leq K_0 \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) \end{aligned} \quad (2.7)$$

với  $K_0$  là một hằng số dương.

Hơn nữa, từ Khẳng định 1, ta thấy rằng

$$\sum_{j=1}^q \omega_j N_{H_j(\tilde{f})}(r) - N_{W_\alpha(\tilde{f})}(r) \leq N_{D(\tilde{f})}^{[m_f]}(r) + O(1).$$

Kết hợp các đánh giá này với (2.7) và áp dụng công thức Jensen, ta có

$$\left\| \left( \sum_{j=1}^q \omega_j - n - 1 \right) T_f(r) \leq N_{D(f)}^{[m_f]}(r) + K_0 \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1) \right\|$$

Vì  $\sum_{j=1}^q \omega_j = (q - 2N + n - 1)\tilde{\omega} + n + 1$  nên bất đẳng thức trên kéo theo

$$(q - 2N + n - 1)T_f(r) \leq \frac{1}{\tilde{\omega}} N_{D(f)}^{[m_f]}(r) + \frac{K_0}{\tilde{\omega}} \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1).$$

Mặt khác, vì  $\frac{1}{\tilde{\omega}} \leq \frac{2N - n + 1}{n + 1}$  nên ta có

$$\begin{aligned} (q - 2N + n - 1)T_f(r) & \leq \frac{2N - n + 1}{n + 1} N_{D(f)}^{[m_f]}(r) \\ & + \frac{K_0}{\tilde{\omega}} \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1), \end{aligned}$$

tức là,

$$\begin{aligned} \left( qT_f(r) - N_{D(f)}^{[m_f]}(r) \right) & \leq \left( 1 - \frac{(q - 2N + n - 1)(n + 1)}{(2N - n + 1)q} \right) qT_f(r) \\ & + K'' \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1) \end{aligned}$$

với  $K''$  là một hằng số dương. Như vậy, Định lý 2.2.6 đã được chứng minh. Do đó, Mệnh đề (a) được chứng minh trong trường hợp nhỏ này.

b) Chúng tôi sẽ chứng minh Mệnh đề (b) của định lý. Ta lặp lại các lập luận của phần a), trong đó Khẳng định 1 được thay thế bằng khẳng định sau.

**Khẳng định 2.**  $\sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})} - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})} \leq \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}.$

Thật vậy, giả sử rằng  $z$  là một không điểm của một hàm  $H_i(\tilde{f})$  nào đó và  $z$  nằm ngoài tập các điểm không xác định  $I(f)$  của  $f$ . Khi đó,  $z$  không thể là không điểm của nhiều hơn  $N$  hàm  $H_i(\tilde{f})$ . Chúng tôi có thể giả sử rằng  $z$  không phải là không điểm của  $H_i(\tilde{f})$  với mọi  $i > N$ . Đặt  $R = \{1, \dots, N+1\}$ . Chọn  $R^1 \subset R$  sao cho

$$\#R^1 = \text{rank} \{H_i\}_{i \in R^1} = n+1$$

và  $R^1$  thỏa mãn Bổ đề 2.2.5 iv) đối với các số  $\{e^{\max\{0, \nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - r_f\}}\}_{i=1}^q$ . Khi đó, chúng tôi có

$$\sum_{i \in R} \omega_i (\nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}(z)) \leq \sum_{i \in R^1} (\nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}(z)) \leq \nu_{W_\alpha(\tilde{f})}(z).$$

Vì vậy,

$$\sum_{i \in R} \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})}(z) - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})}(z) \leq \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}(z).$$

Vậy Khẳng định 2 được chứng minh.

Tương tự như trong phần chứng minh của Mệnh đề a), chúng tôi xét hai trường hợp sau đây.

**Trường hợp b.1:**  $M = \mathbb{C}^m$ . Từ (2.3) và Khẳng định 2, chúng tôi có

$$\| (q - 2N + n - 1)T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q \frac{1}{\tilde{\omega}} \omega_i N_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}(r) + o(T_f(r)) \leq \sum_{i=1}^q N_{H_i(\tilde{f})}^{[r_f]}(r) + o(T_f(r)).$$

Điều này kéo theo

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i) \leq 2N - n + 1$$

và chúng tôi thu được quan hệ số khuyết không lấy tích phân mong muốn trong trường hợp này.

**Trường hợp b.2:**  $M = \mathbb{B}^m(R_0)$  ( $R_0 < +\infty$ ). Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Giả sử phản chứng rằng

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i) &> 2N - n + 1 + 2\rho \frac{(2N - n + 1)l_f}{(n + 1)} \\ &\geq 2N - n + 1 + 2\rho \frac{l_f}{\tilde{\omega}}. \end{aligned}$$

Khi đó, với mỗi  $j \in \{1, \dots, q\}$ , ta có thể chọn các hằng số  $\eta_j > 0$  và hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\tilde{u}_j$  sao cho  $e^{\tilde{u}_j} |\varphi_j| \leq \|\tilde{f}\|^{d\eta_j}$ , trong đó  $\varphi_j$  là một hàm chỉnh hình với  $\nu_{\varphi_j} = \nu_{H_j(\tilde{f})}^{[r_f]}$  và

$$q - \sum_{j=1}^q \eta_j > 2N - n + 1 + 2\rho \frac{l_f}{\tilde{\omega}}.$$

Đặt

$$t' = \frac{2\rho}{\tilde{\omega}(q - 2N + n - 1 - \sum_{j=1}^q \eta_j)} > 0.$$

Khi đó ta có

$$t'l_f = \frac{2\rho l_f}{\tilde{\omega}(q - 2N + n - 1 - \sum_{j=1}^q \eta_j)} < 1.$$

chúng tôi định nghĩa  $v'(z), \lambda', u', \xi', \zeta', p'$  và  $S'_{R^o}(z)$  giống như  $v(z), \lambda, u, \xi, \zeta, p$  và  $S_{R^o}(z)$  trong phần chứng minh của phần a), trong khi đó hằng số  $t$  được thay thế bởi hằng số mới  $t'$ . Lặp lại lần nữa chứng minh của Mệnh đề a), chúng tôi xét hai trường hợp nhỏ sau:

**Trường hợp phụ b.2.1:** Nếu  $\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{T_f(r)}{\log 1/(1-r)} < \infty$  thì bất đẳng thức (2.5) kéo theo

$$\int_{\mathbb{B}^m(1)} e^{\zeta'} dV \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K''}{(1-r)^{p'}} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p'} dr < +\infty,$$

và điều này mâu thuẫn với các kết quả của S.T. Yau [35] và L. Karp [36]. Do đó giả sử phản chứng không đúng và chúng tôi phải có

$$\sum_{i=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_i) \leq 2N - n + 1 + 2\rho \frac{(2N - n + 1)l_f}{n + 1}.$$

Vậy Mệnh đề (b) được chứng minh trong trường hợp nhỏ này.

**Trường hợp b.2.2:** Nếu  $\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{T_f(r)}{\log 1/(1-r)} = \infty$ , thì ta có

$$\int_{S(r)} \frac{\|\tilde{f}\|^{(\sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1)} |z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})|}{|H_1(\tilde{f})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})|^{\omega_q}} \sigma_m \leq K \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} T_f(R) \right)^p$$

với mọi  $0 < r_0 < r < R < 1$ . Sử dụng tính lồi của hàm logarit, chúng tôi lại có

$$\begin{aligned} & \int_{S(r)} \log |z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n}| \sigma_m + \left( \sum_{i=1}^q \omega_i - n - 1 \right) \int_{S(r)} \log \|\tilde{f}\| \sigma_m + \int_{S(r)} \log |W_\alpha(\tilde{f})| \sigma_m \\ & - \sum_{j=1}^q \omega_j \int_{S(r)} \log |H_j(\tilde{f})| \sigma_m \leq K_0 \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right), \end{aligned} \quad (2.8)$$

với  $K_0$  là một hằng số dương nào đó. Kết hợp ước lượng này với Khẳng định 2 và sử dụng công thức Jensen, ta thu được định lý cơ bản thứ hai như sau:

$$\left\| \left( \sum_{j=1}^q \omega_j - n - 1 \right) T_f(r) \leq \sum_{j=1}^q \omega_j N_{H_j(\tilde{f})}^{[r_f]}(r) + K_0 \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ T_f(r) \right) + O(1) \right\|$$

Vì vậy

$$\begin{aligned} \left\| (q - 2N + n - 1) T_f(r) \leq \frac{1}{\bar{\omega}} \sum_{j=1}^q \omega_j N_{H_j(\tilde{f})}^{[r_f]}(r) + O(\log^+ T_f(r)) \right\| \\ \leq \sum_{j=1}^q N_{H_j(\tilde{f})}^{[r_f]}(r) + O(\log^+ T_f(r)). \end{aligned}$$

Định lý cơ bản thứ hai này kéo theo

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[r_f]}(H_j) \leq 2N + n - 1.$$

Vì vậy, Mệnh đề (b) được chứng minh trong trường hợp phụ này.

Chứng minh của định lý được hoàn tất. □

## Chương 3

# QUAN HỆ SỐ KHUYẾT KHÔNG LẤY TÍCH PHÂN CHO ÁNH XẠ PHÂN HÌNH VÀO ĐA TẬP XẠ ẢNH VÀ HỌ SIÊU MẶT TÙY Ý

Trong chương này, chúng tôi thiết lập một quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình từ một đa tạp Kähler đầy vào một đa tạp xạ ảnh giao với một họ siêu mặt bất kỳ với bội được chặn bởi một mức cụ thể. Trong kết quả của chúng tôi, cả chặn trên của tổng số khuyết và mức chặn bội đều được ước lượng độc lập với số lượng siêu mặt tham gia. Do vậy, kết quả của chương này sẽ cho chúng tôi một tổng quát hóa và cải tiến mạnh mẽ của các kết quả trước đó trong chủ đề này.

Chương 3 bao gồm hai mục. Trong mục đầu tiên chúng tôi giới thiệu về trọng Chow, trọng Hilbert và các tính chất sẽ được sử dụng trong luận án. Mục thứ hai sẽ dành để trình bày các chứng minh chi tiết cho định lý về số khuyết không lấy tích phân đối với các ánh xạ phân hình vào không gian xạ ảnh và đa tạp xạ ảnh. Chương 3 được viết dựa trên bài báo [2] trong mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

### 3.1 Trọng Chow và trọng Hilbert

Trong mục này chúng tôi trình bày khái niệm Trọng Chow và trọng Hilbert dựa theo các tài liệu [24], [37] và [38].

Cho  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một đa tạp xạ ảnh có chiều  $k \leq n$  và bậc  $\delta$ . Dạng Chow

trên  $X$  là một đa thức duy nhất (sai khác một bội số là một hằng số khác không) có dạng

$$F_X(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k) = F_X(u_{00}, \dots, u_{0n}; \dots; u_{k0}, \dots, u_{kn})$$

với  $k+1$  khối biến  $\mathbf{u}_i = (u_{i0}, \dots, u_{in})$ , với  $i = 0, \dots, k$ , thỏa mãn ba tính chất sau:

- $F_X$  bất khả quy trong  $\mathbb{C}[u_{00}, \dots, u_{kn}]$ ;
- $F_X$  là đa thức thuần nhất bậc  $\delta$  theo các khối  $\mathbf{u}_i$ , với  $i = 0, \dots, k$ ;
- $F_X(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_k) = 0$  khi và chỉ khi các siêu phẳng

$$u_{i0}x_0 + \dots + u_{in}x_n = 0, \quad i = 0, \dots, k,$$

không có điểm chung trên  $X$ .

Chúng tôi có định nghĩa trọng Chow như sau.

**Định nghĩa 3.1.1.** Cho  $F_X$  là dạng Chow của  $X$ . Đặt  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n)$  là bộ gồm các số thực trong  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ . Xét biểu diễn sau theo biến phụ trợ  $t$ :

$$\begin{aligned} F_X(t^{c_0}u_{00}, \dots, t^{c_n}u_{0n}; \dots; t^{c_0}u_{k0}, \dots, t^{c_n}u_{kn}) \\ = t^{e_0}G_0(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n) + \dots + t^{e_r}G_r(\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n), \end{aligned}$$

với  $G_0, \dots, G_r \in \mathbb{C}[u_{00}, \dots, u_{0n}; \dots; u_{k0}, \dots, u_{kn}]$  và  $e_0 > e_1 > \dots > e_r$ . Khi đó, trọng Chow của  $X$  tương ứng với  $\mathbf{c}$  được định nghĩa bởi

$$e_X(\mathbf{c}) := e_0.$$

Với mỗi tập con  $J = \{j_0, \dots, j_k\}$  của  $\{0, \dots, n\}$  sao cho  $j_0 < j_1 < \dots < j_k$ , ta định nghĩa kí hiệu móc

$$[J] = [J](\mathbf{u}_0, \dots, \mathbf{u}_n) := \det(u_{ij_t}), \quad i, t = 0, \dots, k,$$

trong đó,  $\mathbf{u}_i = (u_{i0}, \dots, u_{in})$  ký hiệu cho khối gồm  $n+1$  biến.

Gọi  $J_1, \dots, J_\beta$ , với  $\beta = \binom{n+1}{k+1}$ , là tập tất cả các tập con gồm  $k+1$  phần tử của  $\{0, \dots, n\}$ . Khi đó, dạng Chow  $F_X$  của  $X$  có thể được viết dưới dạng một đa thức thuần nhất bậc  $\delta$  theo các kí hiệu móc  $[J_1], \dots, [J_\beta]$ . Ta có thể thấy rằng với  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$  và với mọi  $J$  trong  $J_1, \dots, J_\beta$ , có

$$\begin{aligned} [J](t^{c_0}u_{00}, \dots, t^{c_n}u_{0n}, \dots, t^{c_0}u_{k0}, \dots, t^{c_n}u_{kn}) \\ = t^{\sum_{j \in J} c_j} [J](u_{00}, \dots, u_{0n}, \dots, u_{k0}, \dots, u_{kn}). \end{aligned}$$

Với  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n+1}$ , ký hiệu  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$  là đơn thức  $x_0^{a_0} \cdots x_n^{a_n}$  và đặt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} := a_0 c_0 + \cdots + a_n c_n.$$

Gọi  $I = I_X$  là ideal nguyên tố trong  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  xác định  $X$ . Ký hiệu không gian vector các đa thức thuần nhất trong  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  có bậc  $u$  (gồm cả đa thức 0) là  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_u$ . Với mỗi  $u = 1, 2, \dots$ , đặt  $I_u := \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_u \cap I$  và định nghĩa hàm Hilbert  $H_X$  của  $X$  bởi

$$H_X(u) := \dim(\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_u / I_u), \quad u = 1, 2, \dots$$

Theo công thức Hilbert-Serre trong lý thuyết về đa thức Hilbert, với  $m$  đủ lớn, ta có

$$H_X(u) = \delta \cdot \frac{u^k}{k!} + O(u^{k-1}),$$

Ta định nghĩa trọng Hilbert như sau.

**Định nghĩa 3.1.2.** *Trọng Hilbert  $S_X(u, \mathbf{c})$  thứ  $u$  của  $X$  tương ứng với bộ  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  được định nghĩa bởi*

$$S_X(u, \mathbf{c}) := \max \left( \sum_{i=1}^{H_X(u)} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{c} \right),$$

ở đây, giá trị lớn nhất được lấy trên tập tất cả các đơn thức  $\mathbf{x}^{\mathbf{a}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{a}_{H_X(u)}}$  mà lớp đồng dư theo modulo  $I$  tạo thành cơ sở của  $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]_u / I_u$ .

Định lý sau được phát biểu dựa theo J. Evertse và R. Ferretti [23] và được phát biểu lại trong [37] bởi M. Ru cho trường hợp đặc biệt khi trường  $K = \mathbb{C}$ .

**Định lý 3.1.3** (xem Định lý 4.1 [23], Định lý 2.1 [37]). *Giả sử  $X \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là một đa tạp đại số có chiều  $k$  và bậc  $\delta$ . Gọi  $u > \delta$  là một số nguyên và  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n+1}$ . Khi đó, ta có*

$$\frac{1}{u H_X(u)} S_X(u, \mathbf{c}) \geq \frac{1}{(k+1)\delta} e_X(\mathbf{c}) - \frac{(2k+1)\delta}{u} \cdot \left( \max_{i=0, \dots, n} c_i \right).$$

Chúng tôi nhắc lại định nghĩa khái niệm hằng số phân bố của một họ các siêu mặt được đưa ra bởi S. D. Quang trong [26] như sau.

**Định nghĩa 3.1.4** (xem [26, Định nghĩa 3.3]). Cho  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  là họ  $q$  siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Hằng số phân bố  $\Delta_{\mathcal{Q}, X}$  của họ  $\mathcal{Q}$  tương ứng với đa tạp con  $X$  của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  được định nghĩa bởi

$$\Delta_{\mathcal{Q}, V} := \max_{\emptyset \neq \Gamma \subset \{1, \dots, q\}} \frac{\#\Gamma}{\dim V - \dim \left( V \cap \bigcap_{j \in \Gamma} Q_j \right)}.$$

Ở đây, ta quy ước  $\dim \emptyset = -\infty$ . Với  $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , ta sẽ viết  $\Delta_{\mathcal{Q}}$  thay cho  $\Delta_{\mathcal{Q}, \mathbb{P}^n(\mathbb{C})}$ .

Bổ đề sau đây về chặn dưới của trọng Chow được đưa ra bởi S. D. Quang trong [38].

**Bổ đề 3.1.5** (xem [38, Lemma 3.2]). Giả sử  $Y$  là một đa tạp con xạ ảnh của  $\mathbb{P}^R(\mathbb{C})$  với chiều  $k \geq 1$  và bậc  $\delta_Y$ . Gọi  $l$  ( $l \geq k + 1$ ) là một số nguyên và  $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_R)$  là một bộ các số thực không âm. Gọi  $\mathcal{H} = \{H_0, \dots, H_R\}$  là một họ các siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^R(\mathbb{C})$  được xác định bởi  $H_i = \{y_i = 0\}$  ( $0 \leq i \leq R$ ). Gọi  $\{i_1, \dots, i_l\}$  là một tập con của  $\{0, \dots, R\}$  thỏa mãn:

- (1)  $c_{i_l} = \min\{c_{i_1}, \dots, c_{i_l}\}$ ,
- (2)  $Y \cap \bigcap_{j=1}^{l-1} H_{i_j} \neq \emptyset$ ,
- (3) và  $Y \not\subset H_{i_j}$  với mọi  $j = 1, \dots, l$ .

Gọi  $\Delta_{\mathcal{H}, Y}$  là hằng số phân bố của họ  $\mathcal{H} = \{H_{i_j}\}_{j=1}^l$  đối với  $Y$ . Khi đó,

$$e_Y(\mathbf{c}) \geq \frac{\delta_Y}{\Delta_{\mathcal{H}, Y}} (c_{i_1} + \dots + c_{i_l}).$$

## 3.2 Quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler với họ siêu mặt tùy ý

Trong mục này, chúng tôi sẽ chứng minh một quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler đầy vào đa tạp xạ ảnh với họ mục tiêu là các siêu mặt tùy ý. Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh định lý sau.

**Định lý 3.2.1.** Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có chiều  $m$  và  $\omega$  là dạng Kähler của  $M$ . Giả sử  $M$  có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$ .

Cho  $f$  là ánh xạ phân hình không suy biến đại số từ  $M$  vào một đa tạp con  $V$  có chiều  $k$  trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Cho  $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  là họ các siêu mặt trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với hằng số phân bố  $\Delta_{\mathcal{Q},V}$  đối với  $V$ . Gọi  $d = \text{lcm}\{\deg Q_1, \dots, \deg Q_q\}$  và cho  $\rho$  là một số không âm. Giả sử rằng tồn tại một hàm số  $h \geq 0$  liên tục và bị chặn trên  $M$  sao cho

$$\rho\Omega_f + \text{dd}^c \log h^2 \geq \text{Ric } \omega.$$

Khi đó, với mỗi  $\epsilon > 0$ , ta có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon + \frac{\rho(L-1)(k+1)}{ud},$$

trong đó

$$u = \lceil \Delta_{\mathcal{Q},V}(2k+1)(k+1)d^k \deg(V)(\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1) \rceil \text{ và } L = d^k \deg(V)^k \binom{k+u}{k}.$$

Ở đây,  $\lceil x \rceil$  là số nguyên nhỏ nhất không nhỏ hơn số thực  $x$ .

**Nhận xét:** a) Với  $L$  trong Định lý 3.2.1, ta có

$$L \leq d^{k^2+k} \deg(V)^{k+1} e^k \Delta_{\mathcal{Q},V}^k (2k+5)^k (\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1)^k.$$

Vì vậy, tổng số khuyết thu được từ Định lý 3.2.1 được chặn trên bởi lượng:

$$\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon + \Delta_{\mathcal{Q},V}^{k-1} \frac{\rho d^{k^2-1} \deg(V)^k e^k (2k+5)^k (\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1)^{k-1}}{2k+1}.$$

b) Nếu  $V = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  và  $\mathcal{Q}$  ở vị trí tổng quát trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  thì  $\deg(V) = 1, k = n, \Delta_{\mathcal{Q},V} = 1$  và tổng số khuyết thu được từ Định lý 3.2.1 được chặn bởi

$$n+1+\epsilon + \frac{\rho d^{n^2-1} e^n (2n+5)^n ((n+1)\epsilon^{-1} + 1)^{n-1}}{2n+1} \cong n+1+\epsilon + O(2^n e^n d^{n^2} (n\epsilon^{-1})^{n-1})\rho.$$

Lưu ý rằng, đại lượng chặn trên cho tổng số khuyết được M. Ru và S. Sogome [10] đưa ra trong trường hợp này là:  $n+1+\epsilon + O(2^{2n^2+4n} e^{2n} d^{4n-1} (n\epsilon^{-1})^{2n})\rho$ .

c) Ánh xạ  $f$  được nói là bị rẽ nhánh trên một siêu mặt  $Q$  với bội ít nhất là  $m$  nếu hoặc  $f(M) \subset Q$  hoặc  $\nu_{Q(f)}(z) \geq m$  với mọi  $z \in \text{Supp } \nu_{Q(f)}$ . Bằng cách chọn  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , từ Định lý 3.2.1 chúng tôi thu được hệ quả sau.

**Hệ quả 3.2.2.** Giả sử  $M, \omega, V, \mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_q\}$  và  $d$  như trong Định lý 3.2.1. Gọi  $f$  là một ánh xạ phân hình từ  $M$  vào  $V$ . Giả sử rằng với một số  $\rho \geq 0$ , tồn

tại một hàm  $h \geq 0$  liên tục bị chặn trên  $M$  sao cho  $\rho\Omega_f + dd^c \log h^2 \geq \text{Ric } \omega$ . Nếu  $f$  bị rẽ nhánh trên mỗi  $Q_i$  với bội số ít nhất là  $m_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ) sao cho

$$\sum_{j=1}^q \left(1 - \frac{L-1}{m_i}\right) > \Delta_{Q,V}(k+1) + \frac{1}{2} + \frac{\rho(L-1)(k+1)}{ud},$$

trong đó  $u = \lceil \Delta_{Q,V}(2k+1)(k+1)d^k \deg(V)(2\Delta_{Q,V}(k+1)+1) \rceil$  và  $L = d^k \deg(V)^k \binom{k+u}{k}$ , thì  $f$  là ánh xạ phân hình suy biến đại số.

**Chứng minh Định lý 3.2.1.** Bằng cách sử dụng phủ phổ dụng nếu cần thiết, ta chỉ cần chứng minh định lý trong trường hợp  $M$  là hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  của  $\mathbb{C}^m$ . Ta cũng sử dụng chung kí hiệu  $Q_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ) để chỉ đa thức thuần nhất có bậc  $d_j$  xác định của siêu mặt  $Q_j$  nếu không gây nhầm lẫn. Bằng cách thay  $Q_j$  bởi  $Q_j^{d/d_j}$  ( $j = 1, \dots, q$ ) nếu cần thiết, ta có thể giả sử tất cả các siêu mặt  $Q_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ) đều có cùng bậc  $d$ , nghĩa là  $\deg Q_j = d$ .

Xét ánh xạ  $\Phi$  từ  $V$  vào  $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$  biến mỗi điểm  $\mathbf{x} = (x_0 : \dots : x_n) \in V$  thành điểm  $\Phi(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$  được cho bởi

$$\Phi(\mathbf{x}) = (Q_1(x) : \dots : Q_q(x)),$$

trong đó  $x = (x_0, \dots, x_n)$ . Ta đặt  $\tilde{\Phi}(x) = (Q_1(x), \dots, Q_q(x))$  và cố định một biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  của  $f$ .

Đặt  $Y = \Phi(V)$ . Vì  $V \cap \bigcap_{j=1}^q Q_j = \emptyset$  nên  $\Phi$  là một ánh xạ kiểu hữu hạn trên  $V$ , và  $Y$  là một đa tạp con xạ ảnh phức của  $\mathbb{P}^{q-1}(\mathbb{C})$  với  $\dim Y = k$  và bậc  $\delta := \deg(Y) \leq d^k \cdot \deg(V)$ .

Với mỗi  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^q$  và  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_q)$ , chúng tôi ký hiệu  $\mathbf{y}^{\mathbf{a}} = y_1^{a_1} \dots y_q^{a_q}$ . Với một số nguyên dương  $u$ , ta đặt  $\xi_u := \binom{q+u}{u}$  và định nghĩa

$$Y_u := \mathbb{C}[y_1, \dots, y_q]_u / (I_Y)_u.$$

Khi đó  $Y_u$  là một không gian vector trên  $\mathbb{C}$  có chiều bằng  $H_Y(u)$ . Đặt  $n_u = H_Y(u) - 1$  và lấy  $v_0, \dots, v_{n_u}$  là các đa thức thuần nhất trong  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_q]_u$ , sao cho các lớp tương đương của chúng tạo thành một cơ sở của  $Y_u$ .

Bây giờ, ta xét ánh xạ phân hình  $F$  từ  $\mathbb{B}^m(R_0)$  vào  $\mathbb{P}^{n_u}(\mathbb{C})$  với biểu diễn rút gọn được cho bởi

$$\tilde{F} = (v_0(\tilde{\Phi} \circ \tilde{f}), \dots, v_{n_u}(\tilde{\Phi} \circ \tilde{f})).$$

Vì  $f$  là không suy biến đại số nên  $F$  là không suy biến tuyến tính. Do đó, tồn tại một họ đa chỉ số chấp nhận được  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n_u}) \in (\mathbb{Z}_+^m)^{n_u+1}$  sao cho

$$W^\alpha(F_0, \dots, F_{n_u}) = \det(D_{\alpha_i}(v_s(\Phi \circ \tilde{f})))_{0 \leq i, s \leq n_u} \neq 0.$$

Cố định một điểm  $z \in \mathbb{B}^m(R_0)$  sao cho  $Q_i(\tilde{f}(z)) \neq 0$  với mọi  $i = 1, \dots, q$ . Chúng tôi định nghĩa

$$\mathbf{c}_z = (c_{1,z}, \dots, c_{q,z}) \in \mathbb{Z}^q,$$

với

$$c_{i,z} := \log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d \|Q_i\|}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} \geq 0 \text{ với } i = 1, \dots, q.$$

Theo định nghĩa của trọng Hilbert, tồn tại  $\mathbf{a}_{0,z}, \dots, \mathbf{a}_{n_u,z} \in \mathbb{N}^q$  với

$$\mathbf{a}_{j,z} = (a_{j,1,z}, \dots, a_{j,q,z}),$$

với  $a_{j,i,z} \in \{1, \dots, u\}$ , sao cho các lớp đồng dư của  $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_{0,z}}, \dots, \mathbf{y}^{\mathbf{a}_{n_u,z}}$  theo modulo  $(I_Y)_u$  tạo thành một cơ sở của  $\mathbb{C}[y_1, \dots, y_q]_u / (I_Y)_u$  và

$$S_Y(u, \mathbf{c}_z) = \sum_{j=0}^{n_u} \mathbf{a}_{j,z} \cdot \mathbf{c}_z.$$

Ta thấy rằng  $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_{j,z}} \in Y_u$  (modulo  $(I_Y)_u$ ). Do đó, ta có thể viết

$$\mathbf{y}^{\mathbf{a}_{j,z}} = L_{j,z}(v_0, \dots, v_{n_u}),$$

trong đó các  $L_{j,z}$  ( $0 \leq j \leq n_u$ ) là các dạng tuyến tính độc lập.

Ta có

$$\begin{aligned} \log \prod_{j=0}^{n_u} |L_{j,z}(\tilde{F}(z))| &= \log \prod_{j=0}^{n_u} \prod_{i=1}^q |Q_i(\tilde{f}(z))|^{a_{j,i,z}} \\ &= -S_Y(u, \mathbf{c}_z) + du(n_u + 1) \log \|\tilde{f}(z)\| + O(u(n_u + 1)). \end{aligned}$$

Do đó,

$$S_Y(u, \mathbf{c}_z) = \log \prod_{j=0}^{n_u} \frac{1}{|L_{j,z}(\tilde{F}(z))|} + du(n_u + 1) \log \|\tilde{f}(z)\| + O(u(n_u + 1)). \quad (3.1)$$

Từ Định lý 3.1.3, chúng tôi có

$$\frac{1}{u(n_u + 1)} S_Y(u, \mathbf{c}_z) \geq \frac{1}{(k+1)\delta} e_Y(\mathbf{c}_z) - \frac{(2k+1)\delta}{u} \max_{1 \leq i \leq q} c_{i,z} \quad (3.2)$$

Kết hợp (3.1) và (3.2), chúng tôi có

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\delta} e_Y(\mathbf{c}_z) &\leq \frac{1}{u(n_u+1)} \log \prod_{j=0}^{n_u} \frac{1}{|L_{j,z}(\tilde{F}(z))|} + d \log \|\tilde{f}(z)\| \\ &\quad + \frac{(2k+1)\delta}{u} \sum_{i=1}^q \log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d \|Q_i\|}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} + O(1/u). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Giả sử rằng  $c_{1,z} \geq c_{2,z} \geq \dots \geq c_{q,z}$  và ký hiệu  $l$  là chỉ số nhỏ nhất sao cho  $V \cap \bigcap_{j=1}^l Q_j = \emptyset$ . Theo Bổ đề 3.1.5, chúng tôi có

$$\begin{aligned} e_Y(\mathbf{c}_z) &\geq \frac{\delta}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} (c_{1,z} + \dots + c_{l,z}) = \frac{\delta}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} \left( \sum_{i=1}^q \log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d \|Q_i\|}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} \right) \\ &= \frac{\delta}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} \left( \sum_{i=1}^q \log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d \|Q_i\|}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} \right) + O(1). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Do đó, từ (3.3) và (3.4), chúng tôi có

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} \log \prod_{i=1}^q \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} &\leq \frac{k+1}{u(n_u+1)} \log \prod_{j=0}^{n_u} \frac{1}{|L_{j,z}(\tilde{F}(z))|} + d(k+1) \log \|\tilde{f}(z)\| \\ &\quad + \frac{(2k+1)(k+1)\delta}{u} \sum_{i=1}^q \log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^d \|Q_i\|}{|Q_i(\tilde{f})(z)|} + O(1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

trong đó, đại lượng  $O(1)$  không phụ thuộc vào  $z$ .

Đặt  $m_0 = (2k+1)(k+1)\delta$  và  $b = \frac{k+1}{u(n_u+1)}$ . Từ (3.5), chúng tôi có

$$\log \frac{\|\tilde{f}(z)\|^{\frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} d q - d(k+1) - \frac{dm_0 q}{u}} |W_\alpha(\tilde{F}(z))|^b}{\prod_{i=1}^q |Q_i(\tilde{f})(z)|^{\frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} - \frac{m_0}{u}}} \leq b \log \frac{|W_\alpha(\tilde{F}(z))|}{\prod_{j=0}^{n_u} |L_{j,z}(\tilde{F}(z))|} + O(1). \quad (3.6)$$

Ở đây, chúng tôi lưu ý rằng  $L_{j,z}$  phụ thuộc vào  $j$  và  $z$ , nhưng số lượng các dạng tuyến tính này là hữu hạn (tối đa là  $\xi_u$ ). Chúng tôi ký hiệu  $\mathcal{L}$  là tập hợp tất cả các  $L_{j,z}$  xuất hiện trong các bất đẳng thức trên.

Khi đó, từ (3.6), tồn tại một hằng số dương  $K_0$  sao cho

$$\frac{\|\tilde{f}(z)\|^{\frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} d q - d(k+1) - \frac{dm_0 q}{u}} \cdot |W_\alpha(\tilde{F}(z))|^b}{\prod_{i=1}^q |Q_i(\tilde{f})(z)|^{\frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} - \frac{m_0}{u}}} \leq K_0^b \cdot S_{\mathcal{J}}^b, \quad (3.7)$$

trong đó  $S_{\mathcal{J}} = \frac{|W_\alpha(\tilde{F}(z))|}{\prod_{L \in \mathcal{J}} |L(\tilde{F}(z))|}$  với mỗi  $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$  sao cho  $\#\mathcal{J} = n_u + 1$  và  $\{L \in \mathcal{J}\}$  là họ các dạng tuyến tính độc lập.

Chúng tôi đi ước lượng divisor  $\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}$ . Cố định một điểm  $z \in \mathbb{B}^m(R_0)$  nằm ngoài tập không xác định của  $f$ . Giả sử rằng

$$\max\{0, \nu_{Q_1(\tilde{f})}^0(z) - n_u\} \geq \cdots \geq \max\{0, \nu_{Q_q(\tilde{f})}^0(z) - n_u\}$$

và đặt  $l$  như trên. Chúng tôi đặt  $c_i = \max\{0, \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - n_u\}$  và

$$\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^q.$$

Rõ ràng là  $c_i = 0$  đối với tất cả các  $i \geq l$ . Do đó, tồn tại

$$\mathbf{a}_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,p}), a_{j,s} \in \{1, \dots, u\}, j = 0, \dots, n_u$$

sao cho  $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_0}, \dots, \mathbf{y}^{\mathbf{a}_{n_u}}$  tạo thành một cơ sở của  $Y_u$  và

$$S_Y(m, \mathbf{c}) = \sum_{j=0}^{n_u} \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c}.$$

Tương tự như trên, ta viết  $\mathbf{y}^{\mathbf{a}_j} = L_j(v_0, \dots, v_{n_u})$ , trong đó  $L_0, \dots, L_{n_u}$  là các dạng tuyến tính độc lập theo các biến  $y_i$  ( $1 \leq i \leq q$ ). Theo tính chất của Wronskian tổng quát, chúng tôi có

$$W_\alpha(\tilde{F}) = cW_\alpha(L_0(\tilde{F}), \dots, L_{n_u}(\tilde{F})),$$

trong đó  $c$  là một hằng số khác không. Điều này dẫn đến

$$\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}^0(z) = \nu_{W_\alpha(L_1(\tilde{F}), \dots, L_{H_Y(u)}(\tilde{F}))}^0(z) \geq \sum_{j=0}^{n_u} \max\{0, \nu_{L_j(\tilde{F})}^0(z) - n_u\}.$$

Chúng tôi cũng dễ dàng thấy rằng  $\nu_{L_j(\tilde{F})}^0(z) = \sum_{i=1}^q a_{j,i} \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z)$ , và do đó

$$\max\{0, \nu_{L_j(\tilde{F})}^0(z) - n_u\} \geq \sum_{i=1}^q a_{j,i} c_i = \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c}.$$

Vì vậy, chúng tôi có

$$\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}^0(z) \geq \sum_{j=0}^{n_u} \mathbf{a}_j \cdot \mathbf{c} = S_Y(u, \mathbf{c}). \quad (3.8)$$

Theo Bổ đề 3.1.5 chúng tôi có

$$e_Y(\mathbf{c}) \geq \frac{\delta}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} \sum_{i=1}^l c_i = \frac{\delta}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} \sum_{j=1}^q \max\{0, \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - n_u\}.$$

Mặt khác, theo Định lí 3.1.3 chúng tôi có

$$\begin{aligned}
S_Y(u, \mathbf{c}) &\geq \frac{u(n_u + 1)}{(k + 1)\delta} e_Y(\mathbf{c}) - (2k + 1)\delta(n_u + 1) \max_{1 \leq i \leq q} c_i \\
&\geq \frac{u(n_u + 1)}{(k + 1)\Delta_{\mathcal{Q}, V}} \sum_{i=1}^q \max\{0, \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - n_u\} \\
&\quad - (2k + 1)\delta(n_u + 1) \sum_{i=1}^q \max\{0, \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - n_u\}.
\end{aligned}$$

Kết hợp bất đẳng thức này với (3.8), chúng tôi có

$$b\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}^0(z) \geq \left( \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} - \frac{m_0}{u} \right) \sum_{j=1}^q \max\{0, \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - n_u\}. \quad (3.9)$$

Do đó,

$$\left( \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} - \frac{m_0}{u} \right) \sum_{i=1}^q \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - b\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}^0(z) \leq \left( \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} - \frac{m_0}{u} \right) \sum_{i=1}^q \min\{\nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z), n_u\}.$$

Đặt  $x = \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} - \frac{m_0}{u}$ , từ bất đẳng thức trên chúng tôi có

$$\left( \frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q}, V}} - \frac{m_0}{u} \right) b\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}^0(z) - x \left( \sum_{i=1}^q \nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z) - \min\{\nu_{Q_i(\tilde{f})}^0(z), n_u\} \right) \geq 0. \quad (3.10)$$

Chúng tôi giả sử rằng

$$\rho\Omega_f + \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \partial\bar{\partial}\log h^2 \geq \text{Ric}\omega.$$

và

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[n_u]}(Q_j) > \frac{k+1}{x} + \frac{\rho n_u(n_u + 1)b}{d}.$$

Khi đó, với mỗi  $j \in \{1, \dots, q\}$ , tồn tại các hằng số  $\eta_j > 0$  và hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\tilde{u}_j$  sao cho  $e^{\tilde{u}_j}|\varphi_j| \leq \|\tilde{f}\|^{d\eta_j}$ , trong đó  $\varphi_j$  là một hàm chỉnh hình với  $\nu_{\varphi_j} = \min\{\nu_{Q_i(\tilde{f})}^0, n_u\}$  và

$$q - \sum_{j=1}^q \eta_j > \frac{k+1}{x} + \frac{\rho n_u(n_u + 1)b}{dx}.$$

Đặt  $u_j = \tilde{u}_j + \log|\varphi_j|$ , thì  $u_j$  là một hàm đa điều hòa dưới và

$$e^{u_j} \leq \|\tilde{f}\|^{d\eta_j}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Đặt

$$v(z) = \log \left| (z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_u}})^b \frac{|W_\alpha(\tilde{F}(z))|^b}{\prod_{i=1}^q |Q_i(\tilde{f})(z)|^x} \right| + x \sum_{j=1}^q u_j(z).$$

Do đó, ta có bất đẳng thức dòng sau đây

$$\begin{aligned} 2\text{dd}^c[v] &\geq b[\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}] - x \sum_{j=1}^q [\nu_{Q_i(\tilde{f})}] + x \sum_{j=1}^q 2\text{dd}^c[u_j] \\ &\geq b[\nu_{W_\alpha(\tilde{F})}] - x \left( \sum_{j=1}^q [\nu_{Q_i(\tilde{f})}] - \sum_{j=1}^q [\min\{n_u, \nu_{Q_i(\tilde{f})}\}] \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ rằng  $v$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$ .

Mặt khác, theo điều kiện về độ tăng cho ảnh của  $f$ , tồn tại một hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\omega \not\equiv \infty$  trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  sao cho

$$e^\omega dV \leq \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m.$$

Đặt

$$t = \frac{2\rho}{dx \left( q - \frac{k+1}{x} - \sum_{j=1}^q \eta_j \right)} > 0$$

và

$$\lambda(z) = \left| (z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_u}})^b \frac{|W_\alpha(\tilde{F}(z))|^b}{|Q_1(\tilde{f})(z) \cdots Q_q(\tilde{f})(z)|^x} \right|.$$

Rõ ràng rằng  $\frac{n_u(n_u+1)b}{2}t < 1$ , và hàm  $\zeta = \omega + tv$  là đa điều hòa dưới trên đa tạp Kähler  $M$ . Chọn một số dương  $\gamma$  sao cho  $0 < \frac{n_u(n_u+1)b}{2}t < \gamma < 1$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} e^\zeta dV &= e^{\omega+tv} dV \leq e^{tv} \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m = |\lambda|^t \left( \prod_{j=1}^q e^{txu_j} \right) \|\tilde{f}\|^{2\rho} v_m \\ &\leq |\lambda|^t \|\tilde{f}\|^{2\rho+tx \sum_{j=1}^q d\eta_j} v_m = |\lambda|^t \|\tilde{f}\|^{dtx(q-\frac{k+1}{x})} v_m. \end{aligned} \tag{3.11}$$

(a) Trước tiên, ta xét trường hợp  $R_0 < \infty$  và  $\limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{T_f(r)}{\log 1/(R_0 - r)} < \infty$ . Chúng tôi chỉ cần chứng minh Định lý trong trường hợp  $\mathbb{B}^m(R_0) = \mathbb{B}^m(1)$ .

Tích phân hai vế của (3.11) trên  $\mathbb{B}^m(1)$  và sử dụng (3.7), ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^m(1)} e^\zeta dV &\leq \int_{\mathbb{B}^m(1)} |\lambda|^t \|\tilde{f}\|^{dx(q-\frac{k+1}{x})} v_m. \\ &= 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} (|\lambda| \|\tilde{f}\|^{dxq-d(k+1)})^t \sigma_m \right) dr \\ &\leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \sum_{\mathcal{J}} |(z^{\alpha_0+\dots+\alpha_{n_u}}) K_0 S_{\mathcal{J}}|^{bt} \sigma_m \right) dr, \end{aligned} \quad (3.12)$$

trong đó, phép tổng được thực hiện trên tất cả  $\mathcal{J} \subset \mathcal{L}$  với  $\#J = n_u + 1$  và  $\{L \in \mathcal{J}\}$  là tuyến tính độc lập.

Chúng tôi lưu ý rằng  $(\sum_{i=0}^{n_u} |\alpha_i|)bt \leq \frac{n_u(n_u+1)b}{2}t < \gamma < 1$ . Do đó, theo Mệnh đề 2.2.3, tồn tại một hằng số dương  $K_1$  sao cho, với mọi  $0 < r_0 < r < r' < 1$ , ta có

$$\int_{S(r)} |(z^{\alpha_0+\dots+\alpha_{n_u}}) K_0 S_{\mathcal{J}}(z)|^{bt} \sigma_m \leq K_1 \left( \frac{r'^{2m-1}}{r'-r} dT_f(r') \right)^\gamma.$$

Chọn  $r' = r + \frac{1-r}{eT_f(r)}$ , ta có  $T_f(r', r_0) \leq 2T_f(r)$  ngoài một tập hợp con  $E \subset [0, 1]$

với  $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$ . Do đó, bất đẳng thức trên suy ra tồn tại một hằng số dương  $K$  sao cho

$$\int_{S(r)} |(z^{\alpha_1+\dots+\alpha_{n_u}}) K_0 S_J(z)|^{bt} \sigma_m \leq \frac{K}{(1-r)^\gamma} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^\gamma$$

với mọi  $r \in (0; 1)$  và nằm ngoài  $E$ . Bằng cách chọn  $K$  đủ lớn, ta có thể giả sử rằng bất đẳng thức trên đúng với mọi  $r \in (0; 1)$ .

Do vậy, bất đẳng thức (3.12) kéo theo

$$\int_{\mathbb{B}^m(1)} e^\zeta dV \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K}{(1-r)^\gamma} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^\gamma dr < +\infty$$

Điều này mâu thuẫn với các kết quả của S. T. Yau và L. Karp (xem [36, 35]).

Do đó, chúng tôi có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[n_u]}(Q_j) \leq \frac{k+1}{x} + \frac{\rho n_u(n_u+1)b}{d} = \frac{k+1}{x} + \frac{\rho n_u(k+1)}{ud}.$$

Mặt khác, chúng tôi có  $u \geq \Delta_{\mathcal{Q},V} m_0 (\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon) \epsilon^{-1}$ . Điều này suy ra rằng  $\frac{\Delta_{\mathcal{Q},V} m_0}{u} \leq \frac{\epsilon}{\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon} = 1 - \frac{\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)}{\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon}$ . Do đó

$$\frac{k+1}{x} = \frac{k+1}{\frac{1}{\Delta_{\mathcal{Q},V}} - \frac{m_0}{u}} = \frac{\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)}{1 - \frac{\Delta_{\mathcal{Q},V} m_0}{u}} \leq \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon. \quad (3.13)$$

Chúng tôi có  $n_u = H_Y(u) - 1 \leq \delta \binom{k+u}{k} - 1 \leq d^k \deg(V) \binom{k+u}{k} - 1 = L - 1$ . Do đó, chúng tôi có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon + \frac{\rho(k+1)(L-1)}{ud}.$$

Chúng tôi ước lượng  $L$  như sau. Nếu  $k = 1$  thì

$$\begin{aligned} L &= d \deg(V)(1+u) \\ &< d \deg(V) (\Delta_{\mathcal{Q},V} 6d \deg(V)(2\Delta_{\mathcal{Q},V}\epsilon^{-1} + 1) + 2) \\ &< d^2 \deg(V)^2 e \Delta_{\mathcal{Q},V} 7(2\Delta_{\mathcal{Q},V}\epsilon^{-1} + 1). \end{aligned}$$

Ngược lại, nếu  $k \geq 2$  thì

$$\begin{aligned} L &\leq d^k \deg(V) e^k \left(1 + \frac{u}{k}\right)^k \\ &< d^k \deg(V) e^k \left(1 + \frac{d^k \deg(V) \Delta_{\mathcal{Q},V} (2k+1)(k+1)(\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1) + 1}{k}\right)^k \\ &< d^{k^2+k} \deg(V)^{k+1} e^k \Delta_{\mathcal{Q},V}^k (2k+5)^k (\Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1)\epsilon^{-1} + 1)^k. \end{aligned}$$

(b) Cuối cùng, ta xét trường hợp còn lại khi  $\lim_{r \rightarrow R_0} \sup \frac{T_f(r)}{\log(1/(R_0 - r))} = \infty$  hoặc  $R_0 = +\infty$ . Rõ ràng là chúng tôi chỉ cần chứng minh định lý sau đây.

**Định lý 3.2.3.** *Với giả thiết của Định lý 3.2.1, chúng tôi có*

$$(q - \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) - \epsilon)T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q \frac{1}{d} N_{Q_i(\tilde{f})}^{[L-1]}(r) + S(r),$$

trong đó  $S(r)$  được đánh giá như sau:

(i) Trong trường hợp  $R_0 < \infty$  thì

$$S(r) \leq K(\log^+ \frac{1}{R_0 - r} + \log^+ T_f(r))$$

với mọi  $0 < r_0 < r < R_0$  ngoài một tập  $E \subset [0, R_0]$  với  $\int_E \frac{dt}{R_0 - t} < \infty$  và  $K$  là một hằng số dương.

(ii) Trong trường hợp  $R_0 = \infty$  thì

$$S(r) \leq K(\log r + \log^+ T_f(r))$$

với mọi  $0 < r_0 < r < \infty$  ngoài một tập  $E' \subset [0, \infty]$  với  $\int_{E'} dt < \infty$  và  $K$  là một hằng số dương.

*Chứng minh.* Lập lại lập luận trên, chúng tôi có

$$\int_{S(r)} \left| (z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_u}})^b \frac{\|\tilde{f}(z)\|^{xdq-d(k+1)} |W_\alpha(\tilde{F})(z)|^b}{\prod_{i=1}^q |Q_i(\tilde{f})(z)|^x} \right|^t \sigma_m \leq K_1 \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} dT_f(R) \right)^\delta.$$

với mọi  $0 < r_0 < r < R < R_0$ . Sử dụng tính lồi của hàm logarit, chúng tôi có

$$\begin{aligned} & b \int_{S(r)} \log|(z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_{n_u}})| \sigma_m + (xdq - d(k+1)) \int_{S(r)} \log\|\tilde{f}\| \sigma_m \\ & + b \int_{S(r)} \log|W_\alpha(\tilde{F})| \sigma_m - x \sum_{j=1}^q \int_{S(r)} \log|Q_j(\tilde{f})| \sigma_m \leq K \left( \log^+ \frac{R}{R-r} + \log^+ T_f(R) \right) \end{aligned}$$

với một hằng số dương  $K$  nào đó. Theo công thức Jensen, bất đẳng thức này kéo theo

$$\begin{aligned} & (xdq - d(k+1))T_f(r) + bN_{W_\alpha(\tilde{F})}(r) - x \sum_{i=1}^q N_{Q_i(\tilde{f})}(r) \\ & \leq K \left( \log^+ \frac{R}{R-r} + \log^+ T_f(R) \right) + O(1). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Từ (3.9), ta có

$$x \sum_{i=1}^q N_{Q_i(\tilde{f})}(r) - bN_{W_\alpha(\tilde{F})}(r) \leq x \sum_{i=1}^q N_{Q_i(\tilde{f})}^{[L-1]}(r).$$

Kết hợp ước lượng này với (3.14), ta được

$$\left( q - \frac{k+1}{x} \right) T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q \frac{1}{d} N_{Q_i(\tilde{f})}^{[L-1]}(r) + \frac{K}{x} \left( \log^+ \frac{R}{R-r} + \log^+ T_f(R) \right) + O(1). \quad (3.15)$$

Chọn  $R = r + \frac{R_0 - r}{eT_f(r)}$  nếu  $R_0 < \infty$  và  $R = r + \frac{1}{T_f(r)}$  nếu  $R_0 = \infty$ , ta có

$$T_f\left(r + \frac{R_0 - r}{eT_f(r)}\right) \leq 2T_f(r)$$

với mọi  $r \in [0, R_0)$  ngoài một tập con  $E \subset [0, R_0)$  với  $\int_E \frac{dr}{R_0 - r} < +\infty$  trong trường hợp  $R_0 < \infty$  và

$$T_f\left(r + \frac{1}{T_f(r)}\right) \leq 2T_f(r)$$

ngoài một tập con  $E' \subset [0, \infty)$  với  $\int_{E'} dr < \infty$  trong trường hợp  $R_0 = \infty$ . Do đó, từ (3.13) và (3.15), ta thu được bất đẳng thức mong muốn của Định lý 3.2.3.

$$(q - \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) - \epsilon)T_f(r) \leq \sum_{i=1}^q \frac{1}{d} N_{Q_i(\tilde{f})}^{[L-1]}(r) + S(r).$$

Quay trở lại trường hợp (b). Từ Định lý 3.2.3, ta có

$$\sum_{j=1}^q \delta_f^{[L-1]}(Q_j) \leq \sum_{j=1}^q \delta_{f,*}^{[L-1]}(Q_j) \leq \Delta_{\mathcal{Q},V}(k+1) + \epsilon.$$

Định lý 3.2.1 được chứng minh trong trường hợp này. □

## Chương 4

# ÁNH XẠ PHÂN HÌNH TRÊN ĐA TẬP KÄHLER CÓ CHUNG ẢNH NGƯỢC MỘT SỐ SIÊU PHẪNG

Chương 4 bao gồm ba mục. Mục đầu tiên trình bày và chứng minh định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình có chung ảnh ngược với một họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát. Mục thứ hai đưa ra chứng minh chi tiết cho hai định lý về các ánh xạ phân hình không suy biến vì phân chia sẽ yếu một họ các siêu phẳng. Trong mục cuối cùng, chúng tôi chứng minh một định lý các ánh xạ phân hình chung ảnh ngược đối với các họ siêu phẳng khác nhau.

Chương 4 được viết dựa trên một phần của bài báo [1], bài báo [3] và [4] trong mục các công trình đã công bố liên quan đến luận án.

### 4.1 Định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình và họ siêu mặt ở vị trí dưới tổng quát.

Trong phần này, chúng tôi sẽ chứng minh định lý duy nhất sau về các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược đối với một họ các siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.

**Định lý 4.1.1.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với hình cầu  $B(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính. Giả sử rằng  $f$  và  $g$  thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$  và tồn tại  $q$  siêu phẳng  $H_1, \dots, H_q$  của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí  $N$ -dưới tổng quát sao cho  $f = g$  trên  $\bigcup_{j=1}^q (f^{-1}(H_j) \cup g^{-1}(H_j))$ .*

- a) Nếu  $q > 2N - n + 1 + m_f + m_g + \frac{(l_f + l_g)}{n+1}(2N - n + 1)\rho$  thì  $f \equiv g$ .
- b) Nếu  $q > 2N - n + 1 + \frac{2nq}{q+2n-2} + \frac{(l_f + l_g)}{n+1}(2N - n + 1)\rho$  và giả sử thêm

$$\dim f^{-1}(H_i) \cap f^{-1}(H_j) \leq m - 2 \quad (1 \leq i < j \leq q)$$

thì  $f \equiv g$ .

Ta nhắc lại rằng  $\ell_f, m_f$  (tương tự cho  $\ell_g, m_g$ ) là các số nguyên dương chỉ phụ thuộc vào  $f$  và được định nghĩa trong Chương 2. Hơn nữa, ta có

$$0 \leq m_f \leq \ell_f \leq \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Nhận xét:** (1) Trong trường hợp các siêu phẳng  $\{H_i\}_{1 \leq i \leq q}$  ở vị trí tổng quát, tức là  $N = n$ , chúng tôi thấy rằng

- Định lý 4.1.1(a) chính là Định lý E (trong Chương I) của H. Fujimoto.
- Giả thiết của Định lý 4.1.1(b) được thỏa mãn với

$$q > n + 1 + \frac{2nq}{q+2n-2} + (l_f + l_g)\rho,$$

đặc biệt với  $q > 2n + 2 + (l_f + l_g)\rho$ . Do vậy, kết quả này sẽ kéo theo các kết quả duy nhất trước đây đối với trường hợp các ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  của Z. Chen và Q. Yan (xem [15, Main Theorem]) và nhiều tác giả khác.

(2) Nếu  $f$  và  $g$  là các ánh xạ không suy biến vi phân thì  $m_f = m_g = 1$ ,  $\ell_f = \ell_g = n$ . Do đó, trong trường hợp này, giả thiết của Định lý 4.1.1(a) được thỏa mãn với

$$q \geq 2N - n + 3 + \frac{2n(2N - n + 1)}{n+1}\rho,$$

đặc biệt với  $q > n + 3 + 2n\rho$  nếu  $N = n$ . Vì vậy, kết quả của Định lý 4.1.1 sẽ kéo theo kết quả trước đây cho trường hợp các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân có chung ảnh ngược đối với các siêu phẳng của S. J. Drouilhet (xem [29]).

**Chứng minh định lý 4.1.1.** Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng  $M = \mathbb{B}(R_0)$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Ta gọi  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$  và  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n)$  tương ứng là các tập đa chỉ số chấp nhận được của  $f$  và  $g$ . Ký hiệu  $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq q}$  và  $\tilde{\omega}$  lần lượt là các trọng Nochka và hằng số Nochka của họ  $\{H_i\}_{1 \leq i \leq q}$ .

Giả sử  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  và  $\tilde{g} = (g_0, \dots, g_n)$  là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$  tương ứng. Giả sử phản chứng rằng  $f \neq g$ . Chúng tôi xét đồ thị đơn  $\mathcal{G}$  có  $q$  đỉnh  $\{1, \dots, q\}$ , trong đó hai đỉnh  $i$  và  $j$  kề nhau nếu và chỉ nếu  $\frac{H_i(\tilde{f})}{H_i(\tilde{g})} \neq \frac{H_j(\tilde{f})}{H_j(\tilde{g})}$ . Vì  $f \neq g$  nên mỗi đỉnh phải kề ít nhất  $q - n$  đỉnh khác. Do đó, bậc của bất kỳ đỉnh nào cũng ít nhất là  $q - n > \frac{q}{2}$ . Theo định lý Dirac, tồn tại một chu trình Hamilton  $\sigma_1, \dots, \sigma_q, \sigma_{q+1}$  ( $\sigma_1 = \sigma_{q+1}$ ). Do đó, ta có  $\frac{H_{\sigma_i}(\tilde{f})}{H_{\sigma_i}(\tilde{g})} \neq \frac{H_{\sigma_{i+1}}(\tilde{f})}{H_{\sigma_{i+1}}(\tilde{g})}$  ( $1 \leq i \leq q$ ) và vì vậy

$$P_i := H_{\sigma_i}(\tilde{f})H_{\sigma_{i+1}}(\tilde{g}) - H_{\sigma_{i+1}}(\tilde{f})H_{\sigma_i}(\tilde{g}) \neq 0 \quad (1 \leq i \leq q).$$

Chúng tôi đặt  $P = \prod_{i=1}^q P_i \neq 0$ .

a) Ta chứng minh khẳng định đầu tiên của Định lý. Đặt  $D = H_1 + \dots + H_q$ . Hiển nhiên rằng

$$\nu_P \geq q\nu_{D(\tilde{f})}^{[1]} \geq \frac{q}{m_f} \nu_{D(\tilde{f})}^{[m_f]} \geq \frac{q}{m_f} \left( \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})} - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})} \right).$$

Tương tự, ta cũng có

$$\nu_P \geq \frac{q}{m_g} \left( \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{g})} - \nu_{W_\beta(\tilde{g})} \right).$$

Chúng tôi xét hai trường hợp sau đây.

**Trường hợp a.1:**  $R_0 = \infty$  hoặc  $\limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{T_f(r) + T_g(r)}{\log(1/(R_0 - r))} = \infty$ . Chúng tôi dễ dàng có

$$\begin{aligned} \| q(m_f + m_g)(T_f(r) + T_g(r)) &\geq (m_f + m_g)N_P(r) + O(1) \\ &\geq \sum_{h=\tilde{f}, \tilde{g}} q \left( \sum_{i=1}^q \omega_i N_{H_i(h)}(r) - N_{W(h)}(r) \right) + O(1) \\ &\geq \tilde{\omega} q(q - 2N + n - 1)(T_f(r) + T_g(r)) \\ &\quad + o(T_f(r)) + o(T_g(r)), \end{aligned}$$

với  $W(h) = W_\alpha(\tilde{f})$  nếu  $h = \tilde{f}$  và  $W(h) = W_\beta(\tilde{g})$  nếu  $h = \tilde{g}$ . Cho  $r \rightarrow R_0$ , ta thu được  $m_f + m_g \geq \tilde{\omega}(q - 2N + n - 1)$ , tức là,

$$q \leq 2N - n + 1 + \frac{m_f + m_g}{\tilde{\omega}} \leq 2N - n + 1 + \frac{2N - n + 1}{n + 1}(m_f + m_g).$$

Đây là điều mâu thuẫn.

**Trường hợp a.2:**  $R_0 < \infty$  và  $\limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{T_f(r) + T_g(r)}{\log(1/(R_0 - r))} < \infty$ . Ta có thể giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Ta có

$$\sum_{j=1}^q \omega_i(\nu_{(f, H_j)} + \nu_{(g, H_j)}) - (\nu_{W_\alpha}(f) + \nu_{W_\beta}(g)) \leq \frac{m_f + m_g}{q} \nu_P(z).$$

Đặt  $\phi = \frac{|z^{\alpha_0 + \dots + \alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})|}{|H_1(\tilde{f})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})|^{\omega_q}}$  và  $\psi = \frac{|z^{\beta_0 + \dots + \beta_n} W_\beta(\tilde{g})|}{|H_1(\tilde{g})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{g})|^{\omega_q}}$ . Khi đó  $v = \log(\phi \cdot \psi |P|^{(m_f + m_g)/q})$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}(1)$ . Nếu chúng tôi đặt  $t = \frac{\rho}{\tilde{\omega}(q-2N+n-1) - m_f - m_g}$ , thì  $u = tv$  là đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}(1)$ , và

$$t(l_f + l_g) < \frac{\rho}{\rho(l_f + l_g)} \cdot (l_f + l_g) = 1,$$

với  $q > 2N - n + 1 + \frac{m_f + m_g}{\tilde{\omega}} + \frac{l_f + l_g}{\tilde{\omega}} \rho$ . Do đó, ta có thể chọn một số dương  $p$  sao cho

$$0 < t(l_f + l_g) < p < 1.$$

Chúng tôi viết lại dạng metric Kähler đã cho là

$$\omega = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_{i,j} h_{i\bar{j}} dz_i \wedge d\bar{z}_j.$$

Từ giả thiết rằng cả  $f$  và  $g$  đều thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$ , tồn tại các hàm đa điều hòa dưới liên tục  $u_1, u_2$  trên  $\mathbb{B}(1)$  sao cho

$$e^{u_1} \det(h_{i\bar{j}})^{\frac{1}{2}} \leq \|\tilde{f}\|^\rho,$$

$$e^{u_2} \det(h_{i\bar{j}})^{\frac{1}{2}} \leq \|\tilde{g}\|^\rho.$$

Vì  $|P| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\|$  nên ta có

$$\begin{aligned} e^{u+u_1+u_2} \det(h_{i\bar{j}}) &= e^{tv+u_1+u_2} \det(h_{i\bar{j}}) \\ &\leq e^{tv} \|\tilde{f}\|^\rho \|\tilde{g}\|^\rho = \phi^t \psi^t |P|^{t(m_f+m_g)/q} \|\tilde{f}\|^\rho \|\tilde{g}\|^\rho \\ &\leq C \phi^t \psi^t \|\tilde{f}\|^{t\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \|\tilde{g}\|^{t\tilde{\omega}(q-2N+n-1)}, \end{aligned}$$

với  $C$  là một hằng số dương. Lưu ý rằng dạng thể tích trên  $\mathbb{B}(1)$  được cho bởi

$$dV := c_m \det(h_{i\bar{j}}) v_m$$

với  $c_m$  là một hằng số dương. Do vậy ta có

$$\int_{B(1)} e^{u+u_1+u_2} dV \leq C \int_{B(1)} \phi^t \psi^t \|\tilde{f}\|^{t\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \|\tilde{g}\|^{t\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} v_m.$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \int_{B(1)} e^{u+u_1+u_2} dV &\leq C \left( \int_{B(1)} \phi^{tp_1} \|\tilde{f}\|^{tp_1\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} v_m \right)^{\frac{1}{p_1}} \times \left( \int_{B(1)} \psi^{tp_2} \|\tilde{g}\|^{tp_2\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} v_m \right)^{\frac{1}{p_2}} \\ &\leq C \left( 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \phi^{tp_1} \|\tilde{f}\|^{tp_1\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m \right) dr \right)^{\frac{1}{p_1}} \\ &\quad \times \left( 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \psi^{tp_2} \|\tilde{g}\|^{tp_2\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m \right) dr \right)^{\frac{1}{p_2}}, \end{aligned}$$

trong đó  $p_1 = \frac{l_f + l_g}{l_f}$  và  $p_2 = \frac{l_f + l_g}{l_g}$ . Chúng tôi lưu ý rằng

$$\begin{aligned} \int_{S(r)} \phi^{tp_1} \|\tilde{f}\|^{tp_1\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m &= \int_{S(r)} \left( \frac{|z^{\alpha_0+\dots+\alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})|}{|H_1(\tilde{f})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})|^{\omega_q}} \right)^{tp_1} \\ &\quad \times (\|\tilde{f}\|^{\tilde{\omega}(q-2N+n-1)})^{tp_1} \sigma_m. \end{aligned}$$

Mặt khác, với  $p$  thỏa mãn  $0 < tp_1 l_f = t(l_f + l_g) < p < 1$  và với  $0 < r_0 < r < R < 1$ , ta có

$$\int_{S(r)} \left( \frac{|z^{\alpha_0+\dots+\alpha_n} W_\alpha(\tilde{f})|}{|H_1(\tilde{f})|^{\omega_1} \dots |H_q(\tilde{f})|^{\omega_q}} \right)^{tp_1} (\|\tilde{f}\|^{\tilde{\omega}(q-2N+n-1)})^{tp_1} \sigma_m \leq K_1 \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} T_f(R) \right)^p.$$

Chọn  $R = r + \frac{1-r}{eT_f(r)}$ , chúng tôi có  $T_f(R) \leq 2T_f(r)$  với mọi  $r \in (0; 1)$  ngoài một tập con  $E \subset [0, 1]$  sao cho  $\int_E \frac{1}{1-r} dr < +\infty$ . Do đó, các bất đẳng thức trên cho ta

$$\int_{S(r)} \phi^{tp_1} \|\tilde{f}\|^{tp_1\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m \leq \frac{K'}{(1-r)^p} (T_f(r))^p \leq \frac{K'}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^p$$

(vì  $\lim_{r \rightarrow R_0} \sup \frac{T_f(r) + T_g(r)}{\log(1/(1-r))} < \infty$ ). Do đó, ta có

$$\begin{aligned} & 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \phi^{tp_1} \|\tilde{f}\|^{tp_1 \tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m \right) dr \\ & \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K'}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^p dr < \infty. \end{aligned}$$

Tương tự,

$$\begin{aligned} & 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} \psi^{tp_2} \|\tilde{g}\|^{tp_2 \tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \sigma_m \right) dr \\ & \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K'}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^p dr < \infty. \end{aligned}$$

Do đó, chúng tôi thu được  $\int_{\mathbb{B}(1)} e^{u+u_1+u_2} dV < \infty$ . Điều này mâu thuẫn với kết quả của Yau [11] và Karp [36].

Vậy giả sử phản chứng không đúng. Do đó, chúng tôi phải có  $f \equiv g$  và Khẳng định a) được chứng minh.

b) Với giả thiết bổ sung của Khẳng định b), ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \nu_P & \geq \sum_{i=1}^q (\min\{\nu_{H_{\sigma(i)}(\tilde{f})}, \nu_{H_{\sigma(i)}(\tilde{g})}\} + \min\{\nu_{H_{\sigma(i+1)}(\tilde{f})}, \nu_{H_{\sigma(i+1)}(\tilde{g})}\}) + \sum_{j \neq \sigma(i), \sigma(i+1)} \nu_{H_j(\tilde{f})}^{[1]} \\ & \geq 2 \sum_{i=1}^q (\nu_{H_i(\tilde{f})}^{[n]} + \nu_{H_i(\tilde{g})}^{[n]} - n \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[1]}) + (q-2) \sum_{i=1}^q \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[1]} \\ & = 2 \sum_{i=1}^q (\nu_{H_i(\tilde{f})}^{[n]} + \nu_{H_i(\tilde{g})}^{[n]}) + (q-2n-2) \sum_{i=1}^q \nu_{H_i(\tilde{f})}^{[1]} \\ & \leq \frac{q+2n-2}{2n} \sum_{i=1}^q (\nu_{H_i(\tilde{f})}^{[n]} + \nu_{H_i(\tilde{g})}^{[n]}) \\ & \leq \frac{q+2n-2}{2n\tilde{\omega}} \sum_{i=1}^q \omega_i (\nu_{(f, H_i)}^{[n]} + \nu_{H_i(\tilde{g})}^{[n]}) \\ & \leq \frac{q+2n-2}{2n\tilde{\omega}} \left( \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{f})} - \nu_{W_\alpha(\tilde{f})} + \sum_{i=1}^q \omega_i \nu_{H_i(\tilde{g})} - \nu_{W_\beta(\tilde{g})} \right) \end{aligned}$$

Ta xét hai trường hợp sau.

**Trường hợp b.1:**  $R_0 = \infty$  hoặc  $\limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{T_f(r) + T_g(r)}{\log(1/(R_0 - r))} = \infty$ . Chúng tôi dễ dàng có

$$\begin{aligned} \|q(T_f(r) + T_g(r)) &\geq 2N_P(r) + O(1) \\ &\geq \frac{q + 2n - 2}{2n} \sum_{i=1}^q (N_{H_i(\tilde{f})}^{[n]}(r) + N_{H_i(\tilde{g})}^{[n]}(r)) + O(r) \\ &\geq \frac{q + 2n - 2}{2n} \sum_{h=f,g} (q - 2N + n - 1)(T_f(r) + T_g(r)) \\ &\quad + o(T_f(r)) + o(T_g(r)). \end{aligned}$$

Cho  $r \rightarrow R_0$ , ta thu được  $q \geq \frac{q + 2n - 2}{n}(q - 2N + n - 1)$ , nghĩa là,

$$q \leq 2N - n + 1 + \frac{2nq}{q + 2n - 2}.$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

**Trường hợp b.2:**  $R_0 < \infty$  và  $\limsup_{r \rightarrow R_0} \frac{T_f(r) + T_g(r)}{\log(1/(R_0 - r))} < \infty$ . Ta có thể giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Ta định nghĩa  $\phi$  và  $\psi$  như trong phần a). Khi đó  $v' = \log(\phi \cdot \psi|P|^{(2nq\tilde{\omega})/(q+2n-2)})$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}(1)$ . Nếu chúng tôi đặt  $t' = \frac{\rho}{\tilde{\omega} \left( q - 2N + n - 1 - \frac{2nq}{q + 2n - 2} \right)}$  thì  $u' = t'v'$  là một hàm đa điều hòa dưới

trên  $\mathbb{B}(1)$ , và

$$t'(l_f + l_g) < \frac{\rho}{\rho(l_f + l_g)} \cdot (l_g + l_g) = 1,$$

với  $q > 2N - n + 1 + \frac{2nq}{q + 2n - 2} + \frac{l_f + l_g}{\tilde{\omega}}\rho$ . Vì vậy, chúng tôi có thể chọn một số dương  $p'$  sao cho

$$0 < t'(l_f + l_g) < p' < 1.$$

Vì  $|P| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\|$ , ta có

$$\begin{aligned} e^{u'+u_1+u_2} \det(h_{i\bar{j}}) &= e^{t'v'+u_1+u_2} \det(h_{i\bar{j}}) \\ &\leq e^{t'v'} \|\tilde{f}\|^\rho \|\tilde{g}\|^\rho = \phi^t \psi^t |P|^{t'(2nq\tilde{\omega})/(q+2n-2)} \|\tilde{f}\|^\rho \|\tilde{g}\|^\rho \\ &\leq C' \phi^t \psi^t \|\tilde{f}\|^{t'\tilde{\omega}(q-2N+n-1)} \|\tilde{g}\|^{t'\tilde{\omega}(q-2N+n-1)}, \end{aligned}$$

với  $C'$  là một hằng số dương. Lặp lại lập luận tương tự như trong phần a) khi  $t, u, v, p$  được thay bằng  $t', u', v', p'$ , chúng tôi cũng lại thu được mâu thuẫn. Do đó, chúng tôi phải có  $f \equiv g$ . Điều khẳng định b) được chứng minh.  $\square$

## 4.2 Ánh xạ phân hình không suy biến vi phân chia sẻ yếu một họ siêu phẳng.

Trong phần này, chúng tôi sẽ xét trường hợp hai ánh xạ phân hình không suy biến vi phân chia sẻ yếu một họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát. Ở đây, ta nói hai ánh xạ phân hình  $f$  và  $g$  chia sẻ yếu một siêu phẳng  $H$  nếu  $f^{-1}(H) \subset g^{-1}(H)$  và  $f = g$  trên  $f^{-1}(H)$ . Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lý sau.

**Định lý 4.2.1.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Giả sử  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân, thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một số  $\rho \geq 0$ . Cho  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát và cho số nguyên  $p$  với  $n + 2 \leq p \leq n + 3 < q$ . Giả sử rằng:*

- (1)  $f^{-1}(H_i) = g^{-1}(H_i)$  với mọi  $1 \leq i \leq p$ ,  $f^{-1}(H_i) \subset g^{-1}(H_i)$  với mọi  $p+1 \leq i \leq q$ ,
- (2)  $f = g$  trên  $\bigcup_{i=1}^q f^{-1}(H_i)$ .

Khi đó  $f \equiv g$  nếu một trong các điều kiện sau được thỏa mãn:

- (a)  $p = n + 2$  và  $q > 2n + 5 + 4n\rho$ .
- (b)  $p = n + 3$  và  $q > n + 3 + 2n\rho$ .

Chúng ta nhắc lại rằng, một ánh xạ phân hình  $f$  đi từ đa tạp phức  $m$  chiều  $M$  vào một đa tạp phức  $N$  được nói là không suy biến vi phân nếu tồn tại một điểm  $z$  sao cho ma trận Jacobi của  $f$  tại điểm  $z$  có hạng bằng  $m$ . Để chứng minh định lý trên, ta cần một số bổ đề chuẩn bị. Trước tiên, ta có bổ đề sau về divisor sinh bởi tích các ánh xạ ở vị trí đặc biệt được cho bởi W. Stoll.

**Bổ đề 4.2.2** (xem [39, Theorem 2.1, p. 320]). *Giả sử  $A$  là một tập con giải tích của  $\mathbb{B}^m(R_0)$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ) có chiều thuần túy là  $(m - 1)$ . Gọi  $\ell$  và  $k$  là các số nguyên với  $1 \leq \ell \leq k \leq n + 1$ . Gọi  $f_j : \mathbb{B}^m(R_0) \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ,  $1 \leq j \leq k$ , là các ánh xạ phân hình. Giả sử rằng  $f_{i_1} \wedge \dots \wedge f_{i_\ell} = 0$  trên  $A$  với mọi  $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$ . Khi đó ta có  $\nu_{f_1 \wedge \dots \wedge f_k}(z) \geq k - \ell + 1$  cho mọi  $z \in A$ .*

Chúng tôi chứng minh bổ đề sau về divisor của Wronskian tổng quát của ánh xạ phân hình không suy biến vi phân.

**Bổ đề 4.2.3.** Cho  $f$  là một ánh xạ phân hình không suy biến vì phân từ hình cầu  $\mathbb{B}^m(R_0)$  trong  $\mathbb{C}^m$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ( $m \geq n$ ) với một biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$ . Giả sử  $H_0, \dots, H_q$  là  $q+1$  ( $q \geq n+1$ ) siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Gọi  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$  với  $|\alpha_0| = 0, |\alpha_i| = 1$  ( $1 \leq i \leq n$ ) sao cho  $W := \det(\mathcal{D}^{\alpha_i} f_j; 0 \leq i, j \leq n) \neq 0$ . Khi đó, ta có

$$\sum_{i=0}^q \nu_{H_i(\tilde{f})} - \nu_W \leq \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(f)}^{[1]}.$$

*Chứng minh.* Xét một điểm  $a$  cố định là điểm chính quy của tập giải tích  $\text{Supp} \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(\tilde{f})}$  và không thuộc tập không xác định của ánh xạ  $f$ . Vì  $\{H_i\}_{i=0}^q$  ở vị trí tổng quát nên  $a$  là không điểm của nhiều nhất  $n$  hàm  $H_i(\tilde{f})$ . Ta có thể giả sử rằng

$$\nu_{H_0(\tilde{f})}(a) \geq \dots \geq \nu_{H_\ell(\tilde{f})}(a) \geq 0 = \nu_{H_{\ell+1}(\tilde{f})}(z_0) = \dots = \nu_{H_q(\tilde{f})}(a) \quad (\ell \leq n-1).$$

Chúng tôi lưu ý rằng  $W = C \det(\mathcal{D}^{\alpha_i} H_j(\tilde{f}))_{0 \leq i, j \leq n}$  với một hằng số khác không  $C$ . Ngoài ra, ta có thể giả sử rằng

$$\alpha_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \alpha_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, \alpha_n = (0, 0, \dots, 0, \overset{n-th}{1}, 0, \dots, 0).$$

Chọn một hệ tọa độ affine địa phương  $(U, x)$  quanh  $a$ , trong đó  $U$  là một lân cận của  $a$  trong  $\mathbb{B}^m(R_0)$ ,  $x = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $x(a) = (0, \dots, 0)$  sao cho  $\text{Supp} \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(\tilde{f})} \cap U = \{x_1 = 0\} \cap U$ .

Bằng cách thu nhỏ  $U$  nếu cần, chúng tôi có thể giả sử rằng

$$\text{Supp} \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(\tilde{f})} \cap U = \{H_i(\tilde{f}) = 0\} \cap U \quad (0 \leq i \leq \ell)$$

và  $H_j(\tilde{f})$  ( $\ell+1 \leq j \leq q$ ) không triệt tiêu trên  $U$ . Do đó,  $H_i(\tilde{f}) = x_1^{t_i} g_j$  ( $0 \leq i \leq \ell$ ) với một hàm chỉnh hình  $g_j$  sao cho  $g_j(a) \neq 0$ . Vì vậy,

$$\mathcal{D}^{\alpha_i} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right) = \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right) = \sum_{s=1}^m \frac{\partial x_s}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right) \quad (0 \leq j \leq n-1)$$

và

$$\nu_{\frac{\partial}{\partial x_s} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right)}(a) \geq \begin{cases} t_j - 1 & \text{if } s = 1 \\ t_j & \text{if } s > 1, \end{cases} \quad \forall 1 \leq j \leq \ell.$$

Mặt khác, chúng tôi có

$$W = CH_n(\tilde{f})^{n+1} \det \left( \frac{\partial}{\partial z_i} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right) \right)_{i \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1}.$$

Điều này kéo theo

$$\begin{aligned} \nu_W(a) &\geq \min \left\{ \nu_{\det \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_s}} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right) \right)_{0 \leq j, s \leq n-1}}(a); 1 \leq i_0 < \dots < i_{n-1} \leq m \right\} \\ &\geq \min \sum_{j=0}^{n-1} \nu_{\frac{\partial}{\partial x_{i_j}} \left( \frac{H_j(\tilde{f})}{H_n(\tilde{f})} \right)}(a) \\ &\geq t_1 + \dots + t_\ell - 1 = \sum_{i=0}^q \nu_{H_i(\tilde{f})}(a) - \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(\tilde{f})}^{[1]}(a). \end{aligned}$$

Vì vậy, chúng tôi có

$$\sum_{i=0}^q \nu_{H_i(\tilde{f})}(a) - \nu_{\prod_{i=0}^q H_i(\tilde{f})}^{[1]}(a) \geq \nu_W(a).$$

Bổ đề đã được chứng minh.  $\square$

Bổ đề tiếp theo được chúng tôi đưa ra có thể xem như là một dạng tổng quát cho định lý duy nhất của các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler đầy. Bổ đề này đóng vai trò then chốt trong các chứng minh về sau của chúng tôi.

**Bổ đề 4.2.4.** Cho đa tạp Kähler đầy  $M = \mathbb{B}^m(R_0)$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Cho  $k$  là một số nguyên dương và với mỗi  $u \in \{1, \dots, k\}$ , cho  $f^u$  là một ánh xạ phân hình không suy biến vì phân từ  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ , thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$  và có một biểu diễn rút gọn  $\tilde{f}^u = (f_0^u, \dots, f_n^u)$ . Gọi  $\{H_1^u, \dots, H_{q_u}^u\}$  ( $1 \leq u \leq k$ ) là  $k$  họ các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát, trong đó  $q_1, \dots, q_k$  là các số nguyên dương. Giả sử rằng tồn tại một hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng không  $h$  trên  $\mathbb{B}(R_0)$  sao cho:

(a)  $|h| \leq C \|\tilde{f}^1\|^{p_1} \dots \|\tilde{f}^k\|^{p_k}$ , với  $C$  là một hằng số dương,

(b)  $\nu_h \geq \sum_{u=1}^k \lambda_u \nu_{\prod_{i=1}^{q_u} H_i^u}^{[1]}(\tilde{f}^u)$ , trong đó  $\lambda_u$  ( $1 \leq u \leq k$ ) là các hằng số dương.

Khi đó tồn tại một chỉ số  $u$  sao cho  $\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u \leq 0$ , hoặc

$$\sum_{u=1}^k (\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u) \leq 2n\rho \sum_{u=1}^k \lambda_u.$$

*Chứng minh.* Giả sử phản chứng rằng  $\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u > 0$  với mọi  $u = 1, \dots, k$  và

$$\sum_{u=1}^k (\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u) > 2n\rho \sum_{u=1}^k \lambda_u.$$

**Trường hợp 1:**  $R_0 = +\infty$ . Theo định lý cơ bản thứ hai trong lý thuyết Nevanlinna, chúng ta có

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^k \lambda_u(q_u - n - 1)T_{f^u}(r) &\leq \sum_{u=1}^k \lambda_u N_{\prod_{i=1}^{q_u} H_i^u(\tilde{f}^u)}^{[1]}(r, 1) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right) \\ &\leq N_h(r) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right) \\ &= \sum_{u=1}^k p_u T_{f^u}(r) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right), \end{aligned}$$

với mọi  $r \in (1, +\infty)$  ngoài một tập con có độ đo Lebesgue hữu hạn. Đây là điều mâu thuẫn.

**Trường hợp 2:**  $R_0 < +\infty$ . Giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Trong trường hợp này, ta giả sử  $\rho > 0$ . Đối với mỗi  $u$  ( $1 \leq u \leq k$ ), chọn  $(\alpha_0^u, \dots, \alpha_n^u) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$  với  $|\alpha_0^u| = 0, |\alpha_i^u| = 1$  ( $1 \leq u \leq n$ ) sao cho

$$W(\tilde{f}^u) := \det(\mathcal{D}^{\alpha_i^u}(f_j^u); 0 \leq i, j \leq n) \neq 0.$$

Theo Bổ đề 4.2.3, ta có

$$\nu_h \geq \sum_{u=1}^k \lambda_u \nu_{\prod_{i=1}^{q_u} H_i^u(\tilde{f}^u)}^{[1]} \geq \sum_{u=1}^k \lambda_u \left( \sum_{i=1}^{q_u} \nu_{H_i^u(\tilde{f}^u)} - \nu_{W(\tilde{f}^u)} \right).$$

Chúng tôi đặt:

$$\begin{aligned} w_u(z) &:= z^{\alpha_0^u + \dots + \alpha_n^u} \frac{W(\tilde{f}^u)}{\prod_{i=1}^{q_u} H_i^u(\tilde{f}^u)} \quad \forall 1 \leq u \leq k, \\ t &:= \frac{2\rho}{\sum_{u=1}^k (\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u)} > 0 \\ \text{và } \phi &:= |w_1|^{\lambda_1} \dots |w_k|^{\lambda_k} \cdot |h|. \end{aligned}$$

Khi đó,  $a = t \log \phi$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  và

$$\left( \sum_{u=1}^k \lambda_u \right) nt < 1.$$

Do đó, chúng tôi có thể chọn một số dương  $p$  sao cho  $0 < (\sum_{u=1}^k \lambda_u)nt < p < 1$ .

Vì  $f^u$  thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$ , nên tồn tại một hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\varphi_u$  trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  sao cho

$$e^{\varphi_u} dV \leq \|\tilde{f}^u\|^{2\rho} v_m.$$

Khi đó, hàm  $\varphi = \lambda'_1 \varphi_1 + \dots + \lambda'_k \varphi_k + a$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$ , trong đó  $\lambda'_u = \frac{(\lambda_u(q_u - n - 1) - p_u)t}{2\rho}$ . Ta có  $\sum_{u=1}^k \lambda'_u = 1$  và do đó

$$\begin{aligned} e^\varphi dV &= e^{\lambda'_1 \varphi_1 + \dots + \lambda'_k \varphi_k + t \log \phi} dV \\ &\leq C' \cdot e^{t \log \phi} \cdot \prod_{u=1}^k \|\tilde{f}^u\|^{2\lambda'_u \rho} v_m \\ &= C' \cdot |\phi|^t \cdot \prod_{u=1}^k \|\tilde{f}^u\|^{2\lambda'_u \rho} v_m = C'' \cdot \prod_{u=1}^k (|w_u|^{\lambda_u t} \|\tilde{f}^u\|^{2\lambda'_u \rho + p_u t}) v_m \\ &= C'' \cdot \prod_{u=1}^k (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q_u - n - 1)t \lambda_u}) v_m, \end{aligned}$$

trong đó  $C', C''$  là các hằng số dương.

Đặt  $x_u = \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{\lambda_u}$ . Khi đó  $\sum_{u=1}^k \frac{1}{x_u} = 1$ . Lấy tích phân trên  $\mathbb{B}^m(1)$  hai vế của bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta được

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^m(1)} e^\varphi dV &\leq C'' \prod_{u=1}^k \left( \int_{\mathbb{B}^m(1)} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q_u - n - 1)t \lambda_u})^{x_u} v_m \right)^{1/x_u} \\ &= C'' \prod_{u=1}^k \left( 2m \int_0^1 r^{2m-1} \int_{\|z\|=r} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q_u - n - 1)t \lambda_u})^{x_u} v_m \right)^{1/x_u}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Ta xét hai trường hợp nhỏ sau.

*Trường hợp 2.a:* Giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)}{\log 1/(1-r)} < \infty.$$

Ta nhận thấy rằng  $\lambda_u t x_u n = (\sum_{i=1}^k \lambda_i)nt < p$ . Theo Mệnh đề 2.2.3, tồn tại một hằng số dương  $K$  sao cho, với mọi  $0 < r_0 < r < R < 1$ , ta có

$$\int_{\|z\|=r} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q_u - n - 1)t \lambda_u})^{x_u} \sigma_m \leq K \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} T_{f^u}(R) \right)^p \quad (1 \leq u \leq k).$$

Chọn  $R = r + \frac{1-r}{e \max_{1 \leq u \leq k} T_{f^u}(r)}$ , ta có  $T_{f^u}(R) \leq 2T_{f^u}(r)$ , với mọi  $r$  nằm ngoài một tập con  $E$  của  $(0, 1]$  sao cho  $\int_E \frac{1}{1-r} dr < +\infty$ . Khi đó, bất đẳng thức trên suy ra rằng

$$\int_{\|z\|=r} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q_u-n-1)})^{\lambda_u t x_u} \sigma_m \leq \frac{K'}{(1-r)^p} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p} \quad (1 \leq u \leq k),$$

với mọi  $r$  nằm ngoài  $E$ , và với một hằng số dương  $K'$ . Bất đẳng thức (4.1) cho thấy rằng

$$\int_{\mathbb{B}^m(1)} e^\varphi dV \leq C'' 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K'}{1-r} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p} dr < +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với kết quả của S.T. Yau [35] và L. Karp [36].

*Trường hợp 2.b:* Giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)}{\log 1/(1-r)} = \infty.$$

Theo Định lý cơ bản thứ hai cho ánh xạ không suy biến vi phân (xem [8, Proposition 6.2]), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^k p_u T_{f^u}(r) &\geq N_h(r) + S(r) \geq \sum_{u=1}^k \lambda_u N_{\prod_{i=1}^q H_i^u}^{[1]}(\tilde{f}^u)(r) + S(r) \\ &\geq \sum_{u=1}^k \lambda_u (q_u - n - 1) T_{f^u}(r) + O\left(\log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right), \end{aligned}$$

với mọi  $r \in (0; 1)$  ngoài một tập đo được Lebesgue  $E$  với  $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$ . Điều này dẫn đến mâu thuẫn.

Do đó, giả sử phản chứng là sai. Vậy bổ đề được chứng minh.  $\square$

**Chứng minh định lý 4.2.1.** Bằng cách sử dụng phủ phổ dụng nếu cần, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $M = B(R_0) \subset \mathbb{C}^m$ . Giả sử  $f$  có biểu diễn rút gọn  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  và  $g$  có biểu diễn rút gọn  $\tilde{g} = (g_0, \dots, g_n)$ . Giả sử phản chứng  $f \neq g$ . Khi đó tồn tại các chỉ số  $i, j$  sao cho

$$P := f_i g_j - f_j g_i \neq 0.$$

(a) Với  $\lambda > 1$  là một số hữu tỷ tùy ý. Vì  $f = g$  trên  $\bigcup_{i=1}^q f^{-1}(H_i)$  nên ta có

$$\nu_P \geq \nu_{\prod_{i=1}^q H_j}^{[1]}(\tilde{f}) = (\nu_{\prod_{i=1}^q H_j}^{[1]}(\tilde{f}) - \lambda \nu_{\prod_{i=1}^p H_j}^{[1]}(\tilde{f})) + \lambda \nu_{\prod_{i=1}^{n+3} H_j}^{[1]}(\tilde{g}).$$

Lấy một số nguyên dương  $k$  sao cho  $k\lambda$  là một số nguyên và xét hàm chỉnh hình  $\tilde{P} = P^k \cdot \prod_{j=1}^p H_j(\tilde{f})^{k\lambda}$ . Hiển nhiên, ta có

$$\nu_{\tilde{P}} \geq k\nu_{\prod_{j=1}^q H_j(\tilde{f})}^{[1]} + k\lambda\nu_{\prod_{j=1}^{n+3} H_j(\tilde{g})}^{[1]}$$

và  $|\tilde{P}| \leq C\|\tilde{f}\|^{1+(n+2)\lambda k}\|\tilde{g}\|^k$  với một hằng số dương  $C$ . Áp dụng Bổ đề 4.2.4 cho hàm  $\tilde{P}$ , ta có một trong các trường hợp sau xảy ra:

- $(q - n - 1) \leq 1 + (n + 2)\lambda$ ,
- $(q - n - 1) - (1 + (n + 2)\lambda) + \lambda(n + 2 - n - 1) - 1 \leq 2n\rho(1 + \lambda)$ .

Cho  $\lambda \rightarrow 1$ , ta có  $q \leq 2n + 5 + 4n\rho$ . Đây là điều mâu thuẫn.

(b) Chọn  $\beta \in (\frac{1}{2}, 1)$  là một số hữu tỷ tùy ý. Tương tự như trên, ta có

$$\nu_P \geq \nu_{\prod_{i=1}^q H_i(\tilde{f})}^{[1]} \geq (1 - \beta)\nu_{\prod_{i=1}^q H_i(\tilde{f})}^{[1]} + \beta\nu_{\prod_{i=1}^{n+2} H_i(\tilde{g})}^{[1]}.$$

Lấy một số nguyên dương  $\ell$  sao cho  $\ell\beta$  là một số nguyên và xét hàm chỉnh hình  $P^\ell$ . Ta có

$$\nu_{P^\ell} \geq \ell(1 - \beta)\nu_{\prod_{j=1}^q H_j(\tilde{f})}^{[1]} + \ell\beta\nu_{\prod_{j=1}^{n+2} H_j(\tilde{g})}^{[1]}$$

và  $|P^\ell| \leq C'\|\tilde{f}\|^\ell\|\tilde{g}\|^\ell$  với một hằng số dương  $C'$ . Theo Bổ đề 4.2.4, một trong các trường hợp sau đây phải xảy ra:

- $(1 - \beta)(q - n - 1) \leq 1$ ,
- $(1 - \beta)(q - n - 1) - 1 + (2\beta - 1) \leq 2\rho(n(1 - \beta) + n\beta)$ .

Cho  $\beta \rightarrow 1/2$ , ta có  $q \leq n + 3 + 2n\rho$ . Đây là điều mâu thuẫn.

Do đó giả sử phản chứng là sai. Suy ra ta phải có  $f \equiv g$ . Vậy định lý được chứng minh.  $\square$

Dựa vào Bổ đề 4.2.4, chúng tôi đưa ra một định lý phụ thuộc đại số cho các ánh xạ phân hình không suy biến vì phân trên các đa tạp Kähler có chung ảnh ngược một số siêu phẳng như sau.

**Định lý 4.2.5.** *Cho  $M$  như trong Định lý 4.2.1. Giả sử  $f^1, \dots, f^k : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là  $k$  ánh xạ phân hình không suy biến vì phân, thỏa mãn điều kiện  $(C_\rho)$ . Cho  $\ell, p, q$  là các số nguyên dương với  $n + 2 \leq p \leq q$  và  $2 \leq \ell \leq k$  và cho  $H_1, \dots, H_q$  là  $q$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát. Giả sử rằng:*

(1)  $(f^u)^{-1}(H_i) = (f^1)^{-1}(H_i)$  với mọi  $1 \leq i \leq p$  và  $2 \leq u \leq k$ ,

(2)  $f^{i_1} \wedge \dots \wedge f^{i_\ell} = 0$  trên  $\bigcup_{1 \leq i \leq q} (f^1)^{-1}(H_i)$  với mọi  $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$ .

Khi đó  $f^1 \wedge \dots \wedge f^k \equiv 0$  nếu  $q > n+1 + \frac{1}{k-\ell+1} \left(1 + \frac{p(k-1)}{p-n-1}\right) + 2n\rho \left(1 + \frac{(k-1)}{(k-\ell+1)(p-n-1)}\right)$ .

**Chứng minh định lí 4.2.5.** Giả sử rằng  $\tilde{f}^u = (f_0^u, \dots, f_n^u)$  là một biểu diễn rút gọn của  $\tilde{f}^u$  với mọi  $1 \leq u \leq k$ . Giả sử phản chứng rằng  $f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^k \neq 0$ . Khi đó tồn tại  $0 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$  sao cho

$$P = \det(f_{i_j}^u)_{1 \leq u, j \leq k} \neq 0.$$

Đối với mỗi điểm chính quy  $z$  của tập giải tích  $\bigcup_{i=1}^q (f^1)^{-1}(H_i)$  và không nằm trong tập các điểm không xác định của  $f^u$  ( $1 \leq u \leq k$ ), ta có  $f^{i_1}(z) \wedge \dots \wedge f^{i_\ell}(z) = 0$  với mọi  $1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq k$ . Do đó, theo Bổ đề 4.2.2,  $z$  là một không điểm của  $P$  với bội ít nhất là  $k - \ell + 1$ . Vì vậy, ta có

$$\begin{aligned} \nu_P &\geq (k - \ell + 1) \nu_{\prod_{i=1}^q H_j(f^1)}^{[1]} \\ &= (k - \ell + 1) \nu_{\prod_{i=1}^q H_j(f^1)}^{[1]} - (k - 1) \lambda \nu_{\prod_{i=1}^p H_j(f^1)}^{[1]} + \lambda \sum_{u=2}^k \nu_{\prod_{i=1}^p H_j(f^1)}^{[1]}, \end{aligned}$$

với mọi số hữu tỷ dương  $\lambda > \frac{1}{p-n-1}$ . Gọi  $K$  là một số nguyên dương sao cho  $K\lambda \in \mathbb{Z}$ . Ta xét hàm chỉnh hình  $G = P^K \prod_{i=1}^p H_j(\tilde{f}^1)^{K(k-1)\lambda}$ . Hiển nhiên, ta có

$$\nu_G \geq K(k - \ell + 1) \nu_{\prod_{i=1}^q H_j(\tilde{f}^1)}^{[1]} + K\lambda \sum_{u=2}^k \nu_{\prod_{i=1}^p H_j(\tilde{f}^1)}^{[1]}$$

và  $|G| \leq C \|\tilde{f}^1\|^{K+pK(k-1)\lambda} \|\tilde{f}^2\|^K \dots \|f^k\|^K$  với một hằng số dương  $C$ . Theo Bổ đề 4.2.4, một trong các trường hợp sau đây phải xảy ra:

- $(k - \ell + 1)(q - n - 1) \leq 1 + p(k - 1)\lambda$ ,
- $(k - \ell + 1)(q - n - 1) - 1 - p(k - 1)\lambda + (k - 1)(\lambda(p - n - 1) - 1) \leq 2n\rho(k - \ell + 1 + (k - 1)\lambda)$ .

Cho  $\lambda \rightarrow 1/(p - n - 1)$ , ta thu được

$$q \leq n + 1 + \frac{1}{k - \ell + 1} \left(1 + \frac{p(k - 1)}{p - n - 1}\right) + 2n\rho \left(1 + \frac{k - 1}{(k - \ell + 1)(p - n - 1)}\right).$$

Đây là điều mâu thuẫn.

Do đó giả sử phản chứng ta sai, hay ta phải có  $f^1 \wedge f^2 \wedge \dots \wedge f^k \equiv 0$ . Vậy định lý được chứng minh.  $\square$

### 4.3 Các ánh xạ phân hình chung ảnh ngược của các họ siêu phẳng khác nhau.

Trong phần cuối này, chúng tôi sẽ chứng minh định lý duy nhất cho các ánh xạ phân hình trên đa tạp Kähler có chung ảnh ngược đối với các họ các siêu phẳng khác nhau ở vị trí dưới tổng quát. Chúng tôi chứng minh định lý sau.

**Định lý 4.3.1.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với hình cầu  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính thoả mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$ . Cho  $\{H_j\}_{j=1}^q$  và  $\{L_j\}_{j=1}^q$  ( $q \geq 2n+2$ ) là hai họ các siêu phẳng ở vị trí tổng quát và cho  $l_1, \dots, l_q$  là các số nguyên dương (có thể là  $+\infty$ ). Giả sử rằng  $q > n+1 + \rho n(n+1) + \frac{2nq}{q+2n-2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j+1}$  và*

- a)  $\min\{1, \nu_{H_j}(f), \leq l_j\} = \min\{1, \nu_{L_j}(g), \leq l_j\}$  với mọi  $1 \leq j \leq q$ ,
- b)  $\dim \sup \nu_{H_i}(f), \leq l_i \cap \sup \nu_{H_j}(f), \leq l_j \leq m-2$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ ,
- c)  $\frac{H_i(f)}{H_j(f)} = \frac{L_i(g)}{L_j(g)}$  trên  $\bigcup_{s=1}^q \sup \nu_{H_s}(f), \leq l_s \setminus (\sup \nu_{H_j}(f) \cup \sup \nu_{L_j}(g))$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ .

Khi đó tồn tại một phép biến đổi xạ ảnh  $\mathcal{L}$  từ  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  vào chính nó sao cho  $\mathcal{L}(g) \equiv f$  và siêu phẳng xác định bởi  $H_j$  là ảnh của siêu phẳng xác định bởi  $L_j$  qua ánh xạ  $\mathcal{L}$  với mọi  $j \in \{1, \dots, q\}$ .

Trong Định lý 4.3.1, nếu chúng tôi giả sử thêm rằng có  $n+1$  siêu phẳng  $H_{i_j}$  ( $1 \leq j \leq n+1$ ) sao cho  $H_{i_j} \equiv L_{i_j}$ , thì phép biến đổi xạ ảnh  $\mathcal{L}$  phải là phép biến đổi đồng nhất, và do đó  $f \equiv g$ ,  $H_j \equiv L_j$  với mọi  $j = 1, \dots, q$ . Vì vậy, chúng tôi có hệ quả sau về tính duy nhất của các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ các đa tạp Kähler vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  chia sẻ các siêu phẳng.

**Hệ quả 4.3.2.** *Cho  $M$  là một đa tạp Kähler đầy có phủ phổ dụng song chỉnh hình với  $\mathbb{B}(R_0) \subset \mathbb{C}^m$  ( $0 < R_0 \leq \infty$ ). Cho  $f, g : M \rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  là các ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính thoả mãn điều kiện  $(C_\rho)$  với một hằng số không âm  $\rho$ . Gọi  $\{H_j\}_{j=1}^q$  và  $\{L_j\}_{j=1}^q$  ( $q \geq 2n+2$ ) là hai họ các siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát sao cho  $H_j \equiv L_j$  với mọi  $j \in \{1, \dots, n+1\}$ . Cho  $l_1, \dots, l_q$  là các số nguyên dương (có thể là  $+\infty$ ). Giả sử rằng*

- a)  $\min\{1, \nu_{H_j(f), \leq l_j}\} = \min\{1, \nu_{L_j(g), \leq l_j}\}$  với mọi  $1 \leq j \leq q$ ,  
b)  $\dim \sup \nu_{H_i(f), \leq l_i} \cap \sup \nu_{H_j(f), \leq l_j} \leq m - 2$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ ,  
c)  $\frac{H_i(f)}{H_j(f)} = \frac{L_i(g)}{L_j(g)}$  trên  $\bigcup_{i=1}^q \sup \nu_{H_i(f), \leq l_i} \setminus (\sup \nu_{H_j(f)} \cup \sup \nu_{L_j(g)})$  với mọi  $1 \leq i < j \leq q$ .

Nếu  $q > n + 1 + \rho n(n + 1) + \frac{2nq}{q+2n-2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j+1}$  thì  $f \equiv g$  và  $H_j \equiv L_j$  với mọi  $j \in \{1, \dots, q\}$ .

Nhận xét.

- 1) Nếu  $l_1 = \dots = l_q = +\infty$ , thì kết luận của hệ quả đúng với mọi  $q$  sao cho

$$q > n + 1 + \rho n(n + 1) + \frac{2nq}{q + 2n - 2}.$$

- 2) Nếu  $M = \mathbb{C}^m$ , thì ta có thể chọn  $\rho = 0$  và kết luận của hệ quả đúng với  $q$  thỏa mãn

$$q > n + 1 + \frac{2nq}{q + 2n - 2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j + 1}.$$

Bất đẳng thức trên đúng với  $q = 2n + 3$  và  $l_j$  ( $1 \leq j \leq 2n + 3$ ) thỏa mãn

$$\sum_{j=1}^q \frac{1}{l_j + 1} < \frac{n^2 + 5n + 2}{5n^2 + n}.$$

Vì vậy, hệ quả trên cũng tổng quát hóa và cải tiến tất cả các kết quả trước đó về tính duy nhất của các ánh xạ phân hình chia sẻ  $2n + 3$  siêu phẳng của  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát.

Để chứng minh Định lý 4.3.1, chúng tôi trước tiên nhắc lại một số khái niệm sau.

Cho  $f^1, f^2, \dots, f^k$  là  $k$  ánh xạ phân hình từ  $\mathbb{B}^m(R_0)$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với các biểu diễn rút gọn  $\tilde{f}^u = (\tilde{f}_0^u, \dots, \tilde{f}_n^u)$  ( $u = 1, \dots, k$ ). Ta gọi  $\mathcal{C}(\mathbb{B}^m(R_0))$  là tập tất cả các hàm số không âm  $g : \mathbb{B}^m(R_0) \rightarrow [0, +\infty]$  liên tục ngoài một tập giải tích có đối chiều hai (tương ứng với tôpô compact hóa  $[0, +\infty]$ ) và chỉ đạt giá trị  $+\infty$  trong một tập con giải tích thực sự.

Với mỗi số nguyên không âm  $l_0$ , ta kí hiệu  $S(l_0; f^1, \dots, f^k)$  là tập các hàm số  $g$  trong  $\mathcal{C}(\mathbb{B}^m(R_0))$  sao cho tồn tại một phần tử  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$  với  $|\alpha| := \sum_{j=1}^m \alpha_j \leq l_0$ , một số dương  $K$  thỏa mãn: với mọi  $0 \leq tl_0 < p < 1$  ta có

$$\int_{S(r)} |z^\alpha g|^t \sigma_m \leq K \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} \sum_{u=1}^k T_{f^u}(R) \right)^p$$

với mọi  $r$  sao cho  $0 < r_0 < r < R < R_0$ , ở đó  $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_m^{\alpha_m}$ .

Cho  $p$  là một số nguyên không âm. Ta kí hiệu  $B(p, l_0; f^1, \dots, f^k)$  là tập tất cả các hàm phân hình  $h$  trên  $\mathbb{B}^m(R_0)$  sao cho tồn tại  $g \in S(l_0; f^1, \dots, f^k)$  thỏa mãn

$$|h| \leq \|f^1\|^p \cdots \|f^u\|^p \cdot g,$$

ngoài một tập con giải tích thực sự của  $\mathbb{B}^m(R_0)$ .

Theo [25], ta có các khẳng định sau:

- Nếu  $g$  là hàm hằng  $g \in S(0; f^1, \dots, f^k)$ .
- Nếu  $g_i \in S(l_i; f^1, \dots, f^k)$  ( $1 \leq i \leq s$ ) thì  $\prod_{i=1}^s g_i \in S(\sum_{i=1}^s l_i; f^1, \dots, f^k)$ .
- Với mỗi hàm phân hình  $h$ , ta có  $|h| \in S(l_0; f^1, \dots, f^k)$  nếu và chỉ nếu  $h \in B(0, l_0; f^1, \dots, f^k)$ .
- Nếu  $h_i \in B(p_i, l_i; f^1, \dots, f^k)$  ( $1 \leq i \leq s$ ) thì

$$h_1 \cdots h_m \in B\left(\sum_{i=1}^s p_i, \sum_{i=1}^s l_i; f^1, \dots, f^k\right).$$

Ta chứng minh mệnh đề sau:

**Mệnh đề 4.3.3.** *Cho đa tạp Kähler đầy  $M = \mathbb{B}^m(R_0)$  ( $0 < R_0 \leq +\infty$ ). Cho  $f^1, \dots, f^k$  là  $k$  ánh xạ phân hình không suy biến tuyến tính từ  $M$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  với các biểu diễn rút gọn  $\tilde{f}^u = (f_0^u, \dots, f_n^u)$  ( $1 \leq u \leq k$ ), thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$ . Cho  $\{H_1^u, \dots, H_q^u\}$  ( $1 \leq u \leq k$ ) là  $k$  họ siêu phẳng trong  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  ở vị trí tổng quát, trong đó  $q$  là một số nguyên dương. Giả sử tồn tại một hàm chỉnh hình không đồng nhất bằng không  $h \in B(p, l_0; f^1, \dots, f^k)$  sao cho*

$$\nu_h \geq \lambda \sum_{u=1}^k \sum_{i=1}^q \nu_{H_i^u}^{[n]}(f^u),$$

trong đó  $p, l_0$  là các số nguyên không âm, và  $\lambda$  là một số dương. Khi đó, chúng tôi có

$$q \leq n + 1 + \rho k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{\lambda} (p + \rho l_0).$$

*Chứng minh.* Chúng tôi xét hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $R_0 = +\infty$ . Theo định lý cơ bản thứ hai trong lý thuyết Nevanlinna, chúng ta có

$$\begin{aligned} (q - n - 1) \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r, 1) &\leq \sum_{u=1}^k \sum_{i=1}^q N_{H_i^u(\tilde{f}^u)}^{[n]}(r, 1) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right) \\ &\leq \frac{1}{\lambda} N_h(r) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right) \\ &= \frac{p}{\lambda} \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r) + o\left(\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)\right), \end{aligned}$$

với mọi  $r \in (1, +\infty)$  ngoài một tập có độ đo Lebesgue hữu hạn. Cho  $r \rightarrow +\infty$ , ta có

$$q \leq n + 1 + \frac{p}{\lambda}.$$

**Trường hợp 2:**  $R_0 < +\infty$ . Ta có thể giả sử rằng  $R_0 = 1$ . Giả sử phản chứng

$$q > n + 1 + \rho k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{\lambda} (p + \rho l_0).$$

Khi đó, tồn tại một  $\epsilon > 0$  sao cho

$$q > n + 1 + \rho k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{\lambda} (p + \rho(l_0 + \epsilon)).$$

Đặt  $l'_0 = l_0 + \epsilon > l_0$ .

Đối với mỗi  $u$  ( $1 \leq u \leq k$ ), vì  $f^u$  là không suy biến tuyến tính nên tồn tại một tập đa chỉ số chấp nhận được  $(\alpha_0^u, \dots, \alpha_n^u) \in (\mathbb{N}^m)^{n+1}$  với  $|\alpha_i^u| \leq i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) sao cho

$$W(\tilde{f}^u) := \det(\mathcal{D}^{\alpha_i^u}(f_j^u); 0 \leq i, j \leq n) \neq 0.$$

Theo lập luận thường dùng trong lý thuyết Nevanlinna, ta có

$$\nu_h \geq \lambda \sum_{u=1}^k \sum_{i=1}^q \nu_{H_i^u(\tilde{f}^u)}^{[n]} \geq \lambda \sum_{u=1}^k \left( \sum_{i=1}^q \nu_{H_i^u(\tilde{f}^u)} - \nu_{W(\tilde{f}^u)} \right).$$

Đặt  $w_u(z) := z^{\alpha_0^u + \dots + \alpha_n^u} \frac{W(\tilde{f}^u)}{\prod_{i=1}^q H_i^u(\tilde{f}^u)}$  ( $1 \leq u \leq k$ ). Vì  $h \in B(p, l_0; f^1, \dots, f^k)$  nên tồn tại một hàm  $g \in S(l_0; f^1, \dots, f^k)$  và  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m) \in \mathbb{Z}_+^m$  với  $|\beta| \leq l_0$  sao cho

$$\int_{S(r)} |z^\beta g|^{t'} \sigma_m = O \left( \frac{R^{2m-1}}{R-r} \sum_{u=1}^k T_{f^u}(R) \right)^l, \quad (4.2)$$

đối với mọi  $0 \leq l_0 t' < l < 1$  và

$$|h| \leq \left( \prod_{u=1}^k \|\tilde{f}^u\| \right)^p |g|. \quad (4.3)$$

Đặt  $t := \frac{\rho}{q-n-\frac{p}{\lambda}-1} > 0$  và  $\phi := |w_1| \cdots |w_k| \cdot |z^\beta h|^{1/\lambda}$ . Khi đó,  $a = t \log \phi$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(1)$  và

$$\left( k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{l'_0}{\lambda} \right) t < 1.$$

Do đó, ta có thể chọn một số dương  $p'$  sao cho  $0 \leq (k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{l'_0}{\lambda})t < p' < 1$ .

Vì  $f^u$  thỏa mãn điều kiện  $(\mathcal{C}_\rho)$  nên tồn tại một hàm đa điều hòa dưới liên tục  $\varphi_u$  trên  $\mathbb{B}^m(1)$  sao cho

$$e^{\varphi_u} dV \leq \|\tilde{f}^u\|^\rho v_m.$$

Ta thấy rằng  $\varphi = \varphi_1 + \cdots + \varphi_k + a$  là một hàm đa điều hòa dưới trên  $\mathbb{B}^m(1)$ . Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} e^\varphi dV &= e^{\varphi_1 + \cdots + \varphi_k + t \log \phi} dV \leq e^{t \log \phi} \prod_{u=1}^k \|\tilde{f}^u\|^\rho v_m = |\phi|^t \prod_{u=1}^k \|\tilde{f}^u\|^\rho v_m \\ &= |z^\beta g|^{t/\lambda} \prod_{u=1}^k (|w_u|^t \cdot \|\tilde{f}^u\|^{\rho + pt/\lambda}) v_m = |z^\beta g|^{t/\lambda} \prod_{u=1}^k (|w_u|^t \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)t}) v_m. \end{aligned}$$

Đặt  $x = \frac{l'_0/\lambda}{kn(n+1)/2 + l'_0/\lambda}$ ,  $y = \frac{n(n+1)/2}{kn(n+1)/2 + l'_0/\lambda}$ , ta có  $x + ky = 1$ . Do đó, bằng cách tích phân trên  $\mathbb{B}^m(1)$  cả hai vế của bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^m(1)} e^u dV &\leq \int_{\mathbb{B}^m(1)} \prod_{u=1}^k (|w_u|^t \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)t}) |z^\beta g|^{t/\lambda} v_m \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{B}^m(1)} |z^\beta g|^{t/(\lambda x)} v_m \right)^x \\ &\quad \times \prod_{u=1}^k \left( \int_{\mathbb{B}^m(1)} (|w_u|^{t/y} \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)t/y}) v_m \right)^y \\ &\leq \left( 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} |z^\beta g|^{t/(\lambda x)} \sigma_m \right) dr \right)^x \\ &\quad \times \prod_{u=1}^k \left( 2m \int_0^1 r^{2m-1} \left( \int_{S(r)} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)})^{t/y} \sigma_m \right) dr \right)^y. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ta xét hai trường hợp sau.

*Trường hợp 2.a:* Ta giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)}{\log 1/(1-r)} < \infty.$$

Ta thấy  $\frac{l_0 t}{\lambda x} \leq \frac{l'_0 t}{\lambda x} = \left(k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{l'_0}{\lambda}\right)t < p'$  và  $\frac{n(n+1)}{2} \frac{t}{y} = \left(k \frac{n(n+1)}{2} + \frac{l'_0}{\lambda}\right)t < p'$ .

Theo mệnh đề [8, Proposition 6.1] và (4.2), tồn tại một hằng số dương  $K$  sao cho, với mọi  $0 < r_0 < r < r' < 1$ , ta có

$$\int_{S(r)} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)})^{t/y} \sigma_m \leq K \left( \frac{r'^{2m-1}}{r' - r} T_{f^u}(r') \right)^{p'} \quad (1 \leq u \leq k)$$

và  $\int_{S(r)} |z^\beta g|^{t/(\lambda x)} \sigma_m \leq K \left( \frac{r'^{2m-1}}{r' - r} \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r') \right)^{p'}.$

Chọn  $r' = r + \frac{1-r}{e \max_{1 \leq u \leq k} T_{f^u}(r)}$ , ta có  $T_{f^u}(r') \leq 2T_{f^u}(r)$ , với mọi  $r$  ngoài một tập con đo được Lebesgue  $E$  của  $(0, 1]$  với  $\int_E \frac{1}{1-r} dr < +\infty$ . Do đó, bất đẳng thức trên kéo theo

$$\int_{S(r)} (|w_u| \cdot \|\tilde{f}^u\|^{(q-n-1)})^{t/y} \sigma_m \leq \frac{K'}{(1-r)^{p'}} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p'} \quad (1 \leq u \leq k)$$

và  $\int_{S(r)} |z^\beta g|^{t/(\lambda x)} \sigma_m \leq \frac{K'}{(1-r)^{p'}} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p'}$

với mọi  $r$  nằm ngoài  $E$ , và với một hằng số dương  $K'$ . Bất đẳng thức (4.4) dẫn đến

$$\int_{\mathbb{B}^m(1)} e^u dV \leq 2m \int_0^1 r^{2m-1} \frac{K'}{1-r} \left( \log \frac{1}{1-r} \right)^{2p'} dr < +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với kết quả của S.T. Yau [35] và L. Karp [36].

*Trường hợp 2.b:* Ta giả sử rằng

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)}{\log 1/(1-r)} = \infty.$$

Như đã thấy ở trên, ta có

$$\int_{S(r)} |z^\beta g|^{t/(\lambda x)} \sigma_m \leq K \left( \frac{1}{1-r} \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r) \right)^{p'}$$

với mọi  $r_0 < r < 1$ . Theo tính lùi của hàm logarit, ta có

$$\int_{S(r)} \log|z^\beta|^{t/(\lambda x)} \sigma_m + \int_{S(r)} \log|g|^{t/(\lambda x)} \sigma_m \leq K'' \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r) \right).$$

Điều này suy ra

$$\int_{S(r)} \log|g| \sigma_m = O \left( \log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r) \right).$$

Theo [8, Mệnh đề 6.2] và (4.3), ta có

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^k p T_{f^u}(r) + \int_{S(r)} \log|g| \sigma_m &\geq N_h(r) + S(r) \geq \lambda \sum_{u=1}^k \sum_{i=1}^q N_{H_i^u(\tilde{f}^u)}^{[n]}(r) + S(r) \\ &\geq \lambda \sum_{u=1}^k (q - n - 1) T_{f^u}(r) + O(\log^+ \frac{1}{1-r} + \log^+ \sum_{u=1}^k T_{f^u}(r)), \end{aligned}$$

với mọi  $r$  ngoài một tập  $E \in (0; 1]$  đo được Lebesgue với  $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$ . Cho  $r \rightarrow 1$ , ta có  $\frac{p}{\lambda} > q - n - 1$ . Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, giả sử phản chứng là sai. Vậy định lý được chứng minh.  $\square$

**Chứng minh định lí 4.3.1.** Từ giả thiết, ta có

$$q > n + 1 + \frac{2nq}{q + 2n - 2}.$$

Do đó  $q > 2n + 2$  và vì vậy,

$$q > n + 1 + \rho n(n + 1) + \frac{2nq}{q + 2n - 2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j + 1} > 2n + 2 + \rho n(n + 1) + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j + 1}.$$

Bằng cách sử dụng phủ phổ dụng nếu cần, không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng  $M = B(R_0) \subset \mathbb{C}^m$ .

Gọi  $\tilde{f} = (f_0, \dots, f_n)$  và  $\tilde{g} = (g_0, \dots, g_n)$  lần lượt là các biểu diễn rút gọn của  $f$  và  $g$ . Bằng cách thay đổi chỉ số nếu cần, ta có thể giả sử rằng

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{H_1(\tilde{f})}{L_1(\tilde{g})} \equiv \frac{H_2(\tilde{f})}{L_2(\tilde{g})} \equiv \dots \equiv \frac{H_{k_1}(\tilde{f})}{L_{k_1}(\tilde{g})}}_{\text{nhóm 1}} &\equiv \underbrace{\frac{H_{k_1+1}(\tilde{f})}{L_{k_1+1}(\tilde{g})} \equiv \dots \equiv \frac{H_{k_2}(\tilde{f})}{L_{k_2}(\tilde{g})}}_{\text{nhóm 2}} \\ &\not\equiv \underbrace{\frac{H_{k_2+1}(\tilde{f})}{L_{k_2+1}(\tilde{g})} \equiv \dots \equiv \frac{H_{k_3}(\tilde{f})}{L_{k_3}(\tilde{g})}}_{\text{nhóm 3}} \not\equiv \dots \not\equiv \underbrace{\frac{H_{k_{s-1}+1}(\tilde{f})}{L_{k_{s-1}+1}(\tilde{g})} \equiv \dots \equiv \frac{H_{k_s}(\tilde{f})}{L_{k_s}(\tilde{g})}}_{\text{nhóm s}}, \end{aligned}$$

trong đó  $k_s = q$ .

Với mỗi  $1 \leq i \leq q$ , chúng tôi đặt

$$\sigma(i) = \begin{cases} i + n & \text{nếu } i + n \leq q, \\ i + n - q & \text{nếu } i + n > q, \end{cases}$$

và  $P_i = H_i(\tilde{f})L_{\sigma(i)}(\tilde{g}) - L_i(\tilde{g})H_{\sigma(i)}(\tilde{f})$ . Giả sử rằng số phần tử trong mỗi nhóm nhiều nhất là  $n$ . Khi đó  $\frac{H_i(\tilde{f})}{L_i(\tilde{g})}$  và  $\frac{H_{\sigma(i)}(\tilde{f})}{L_{\sigma(i)}(\tilde{g})}$  thuộc về hai nhóm khác nhau với mọi  $i = 1, \dots, q$ . Do đó,  $P_i \neq 0$  đối với mọi  $i \in \{1, \dots, q\}$ . Ta dễ dàng thấy rằng

$$\nu_{P_i}(z) \geq \sum_{j=i, \sigma(i)} \min \left\{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), \nu_{L_j(\tilde{g}), \leq l_j}(z) \right\} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j \neq \sigma(i)}}^q \min \left\{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), 1 \right\}$$

với mọi  $z$  ngoài tập con giải tích  $\bigcup_{1 \leq u < v \leq q} (\text{Supp } \nu_{H_u(\tilde{f}), \leq l_u} \cap \text{Supp } \nu_{H_v(\tilde{f}), \leq l_v})$  có chiều hai.

Bằng cách đặt  $P = \prod_{i=1}^q P_i \neq 0$ , ta có

$$\begin{aligned} \nu_P(z) &\geq 2 \sum_{j=1}^q \min \left\{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), \nu_{L_j(\tilde{g}), \leq l_j}(z) \right\} + (q-2) \sum_{j=1}^q \min \left\{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), 1 \right\} \\ &\geq 2 \sum_{j=1}^q \left( \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \} + \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \} - n \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), 1 \} \right) \\ &\quad + (q-2) \sum_{j=1}^q \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), 1 \} \\ &= 2 \sum_{j=1}^q \left( \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \} + \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \} \right) \\ &\quad + (q-2n-2) \sum_{j=1}^q \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), 1 \} \\ &\geq \sum_{j=1}^q \left( 2 + \frac{q-2n-2}{n} \right) \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \} + 2 \sum_{j=1}^q \min \{ \nu_{L_j(\tilde{g}), \leq l_j}(z), n \}, \end{aligned}$$

và tương tự

$$\nu_P(z) \geq 2 \sum_{j=1}^q \min \{ \nu_{L_j(\tilde{g}), \leq l_j}(z), n \} + \sum_{j=1}^q \left( 2 + \frac{q-2n-2}{n} \right) \min \{ \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n \}$$

với mọi  $z$  nằm ngoài tập  $\bigcup_{1 \leq u < v \leq q} (\text{Supp } \nu_{H_u(\tilde{f}), \leq l_u} \cap \text{Supp } \nu_{H_v(\tilde{f}), \leq l_v})$ .

Hai bất đẳng thức trên kéo theo

$$\begin{aligned}
\nu_P(z) &\geq \frac{q+2n-2}{2n} \sum_{j=1}^q \left( \min\{\nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_j}(z), n\} + \min\{\nu_{L_j(\tilde{g}), \leq l_j}(z), n\} \right) \\
&\geq \frac{q+2n-2}{2n} \sum_{j=1}^q \min\{\nu_{H_j(\tilde{f})}(z), n\} - \min\{\nu_{H_j(\tilde{f}), > l_j}(z), n\} \\
&\quad + \min\{\nu_{L_j(\tilde{g})}(z), n\} - \min\{\nu_{L_j(\tilde{g}), > l_j}(z), n\} \\
&\geq \frac{q+2n-2}{2n} \sum_{j=1}^q \left( \min\{\nu_{H_j(\tilde{f})}(z), n\} - \frac{n}{l_j+1} \nu_{H_j(\tilde{f})}(z) \right. \\
&\quad \left. + \min\{\nu_{L_j(\tilde{g})}(z), n\} - \frac{n}{l_j+1} \nu_{L_j(\tilde{g})}(z) \right)
\end{aligned}$$

với mọi  $z$  nằm ngoài một tập con giải tích có đối chiều hai. Đặt  $\lambda = \prod_{j=1}^q (l_j + 1)$  và đặt  $h = P^{2n\lambda} \prod_{j=1}^q (H_j(\tilde{f}) \cdot L_j(\tilde{g}))^{(q+2n-2)n\lambda/(l_j+1)}$ . Khi đó,  $h$  là một hàm chỉnh hình trên  $\mathbb{B}(R_0)$  và thỏa mãn

$$\nu_h \geq \lambda(q+2n-2) \sum_{j=1}^q (\nu_{(H_j(\tilde{f}))}^{[n]} + \nu_{(L_j(\tilde{g}))}^{[n]}).$$

Dễ dàng thấy rằng

$$|h| \leq |P|^{2n\lambda} \cdot (\|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\|)^{(q+2n-2)n\lambda \sum_{j=1}^q 1/(l_j+1)} \leq (\|\tilde{f}\| \cdot \|\tilde{g}\|)^{2n\lambda q + (q+2n-2)n\lambda \sum_{j=1}^q 1/(l_j+1)},$$

tức là

$$h \in B(2n\lambda q + (q+2n-2)n\lambda \sum_{j=1}^q 1/(l_j+1), 0; f, g).$$

Theo Mệnh đề 4.3.3, ta có

$$\begin{aligned}
q &\leq n+1 + \rho n(n+1) + \frac{2n\lambda q + (q+2n-2)n\lambda \sum_{j=1}^q 1/(l_j+1)}{\lambda(q+2n-2)} \\
&= n+1 + \rho n(n+1) + \frac{2nq}{q+2n-2} + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j+1}.
\end{aligned}$$

Đây là điều mâu thuẫn.

Vậy có một nhóm có ít nhất  $n+1$  phần tử. Ta có thể giả sử rằng

$$\frac{H_1(\tilde{f})}{L_1(\tilde{g})} \equiv \frac{H_2(\tilde{f})}{L_2(\tilde{g})} \equiv \dots \equiv \frac{H_{n+1}(\tilde{f})}{L_{n+1}(\tilde{g})}.$$

Giả sử  $H_i$  và  $L_i$  xác định bởi các dạng tuyến tính

$$H_i(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_{ij}x_j \quad \text{và} \quad L_i(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n b_{ij}x_j \quad \text{với } i = 1, \dots, q.$$

Ta xét ma trận

$$\Phi = \begin{pmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{(n+1)0} & a_{(n+1)1} & \cdots & a_{(n+1)n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(n+1)0} & b_{(n+1)1} & \cdots & b_{(n+1)n} \end{pmatrix}.$$

Đặt

$$\begin{pmatrix} h_0 \\ h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó,  $\tilde{h} = (h_0, h_1, \dots, h_n)$  là một biểu diễn rút gọn của một ánh xạ phân hình  $h$  từ  $\mathbb{B}(R_0)$  vào  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ . Rõ ràng rằng  $H_i(h_0, \dots, h_n) = L_i(g_0, \dots, g_n)$  với mọi  $i = 1, \dots, n+1$ .

Điều này suy ra

$$\frac{H_1(\tilde{f})}{H_1(\tilde{h})} \equiv \frac{H_2(\tilde{f})}{H_2(\tilde{h})} \equiv \cdots \equiv \frac{H_{n+1}(\tilde{f})}{H_{n+1}(\tilde{h})},$$

và do đó  $f \equiv h$ .

Với  $i \in 1, \dots, q$ , ta đặt  $(a'_{i0}, \dots, a'_{in}) = (b_{i0}, \dots, b_{in})\Phi^{-1}$  và định nghĩa  $H'_i$  là siêu phẳng được xác định bởi dạng tuyến tính

$$H'_i(x_0, \dots, x_n) = a'_{i0}x_0 + \cdots + a'_{in}x_n.$$

Ta thấy rằng  $H'_i(\tilde{f}) = H'_i(\tilde{h}) = L_i(\tilde{g})$  với  $i = 1, \dots, q$ , và  $H'_i = H_i$  với mọi  $i = 1, \dots, n+1$ . Giả sử rằng tồn tại  $i_0 > n+1$  với  $H'_{i_0} \neq H_{i_0}$ . Khi đó, với mỗi  $z \in \bigcup_{j=1}^q (\text{Supp } \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_i}) \setminus (I(f) \cup I(g))$ , tồn tại một chỉ số  $j \in \{1, \dots, n+1\}$  sao cho  $H_j(\tilde{f})(z) = H_j(\tilde{h})(z) \neq 0$  và  $\frac{H'_{i_0}(\tilde{h})(z)}{H_j(\tilde{h})(z)} = \frac{H_{i_0}(\tilde{f})(z)}{H_j(\tilde{f})(z)}$ . Điều này dẫn đến  $H'_{i_0}(\tilde{f})(z) = H'_{i_0}(\tilde{h})(z) = H_{i_0}(f)(z)$ . Xét hàm phân hình không đồng nhất bằng không

$$F(z) = H'_{i_0}(\tilde{f})(z) - H_{i_0}(\tilde{f})(z) \not\equiv 0.$$

Ta thấy rằng

$$\begin{aligned}\nu_F &\geq \sum_{j=1}^q \nu_{H_j(\tilde{f}), \leq l_i}^{[1]} \geq \sum_{j=1}^q \nu_{H_j(\tilde{f})}^{[1]} - \sum_{j=1}^q \nu_{H_j(\tilde{f}), > l_i}^{[1]} \\ &\geq \sum_{j=1}^q \frac{1}{n} \nu_{H_j(\tilde{f})}^{[n]} - \sum_{j=1}^q \frac{1}{l_i + 1} \nu_{H_j(\tilde{f})}.\end{aligned}$$

Khi đó, hàm  $F^\lambda \prod_{j=1}^q (H_j(\tilde{f}))^{\lambda/(l_j+1)}$  thuộc tập hợp  $B(\lambda(1 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{l_j+1}), 0; f)$  và thỏa mãn

$$\nu_F \geq \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^q \nu_{H_j(\tilde{f})}^{[n]}.$$

Theo Mệnh đề 4.3.3, ta có

$$\begin{aligned}q &\leq n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \rho + \frac{n\lambda(1 + \sum_{j=1}^q \frac{1}{l_j+1})}{\lambda} \\ &= 2n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} \rho + \sum_{j=1}^q \frac{n}{l_j+1}.\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do đó, không tồn tại chỉ số  $i_0$  như vậy, tức là  $H'_i = H_i$  với mọi  $i = 1, \dots, q$ .

Ta ký hiệu bởi  $\mathcal{L}$  phép biến đổi xạ ảnh từ  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  vào chính nó, biến mỗi điểm  $x = (x_0 : \dots : x_n)$  thành điểm  $x' = (x'_0 : \dots : x'_n)$  được cho bởi

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Khi đó, ta có  $\mathcal{L}(g) \equiv h \equiv f$ .

Hơn nữa, nếu  $x$  là một điểm trên siêu phẳng  $L_i$ , tức là

$$b_{i0}x_0 + b_{i1}x_1 + \dots + b_{in}x_n = 0,$$

thì

$$\sum_{j=0}^n a_{ij}x'_j = (a_{i0}, a_{i1}, \dots, a_{in}) \Phi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (b_{i0}, b_{i1}, \dots, b_{in}) \Phi^{-1} \Phi \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0.$$

Do đó, phép ánh xạ  $\mathcal{L}$  biến điểm  $x$  trên  $L_i$  thành một điểm trên siêu phẳng  $H_i$ .  
Do đó,  $\mathcal{L}(L_i) = H_i$  với mọi  $i = 1, \dots, q$ . Định lý được chứng minh hoàn tất.  $\square$

# KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

## Kết luận

Luận án nghiên cứu các bài toán trong lý thuyết phân bố giá trị cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler đầy vào đa tạp xạ ảnh, với giả thiết rằng đa tạp Kähler có phủ phổ dụng song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$ . Các kết quả chính đạt được trong luận án bao gồm:

- Một định lý về quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh giao với họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.
- Một định lý về quan hệ số khuyết không lấy tích phân cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh giao với họ siêu mặt tùy ý. Trong đó bội chặn và chặn trên của tổng số khuyết không phụ thuộc vào số siêu mặt tham gia.
- Một định lý duy nhất cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh có chung ảnh ngược với họ siêu phẳng ở vị trí dưới tổng quát.
- Một định lý duy nhất cho các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh chia sẻ yếu một họ siêu phẳng ở vị trí tổng quát.
- Một định lý về sự phụ thuộc đại số cho các ánh xạ phân hình không suy biến vi phân từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh có chung ảnh ngược với một họ siêu phẳng ở vị trí tổng quát.
- Một định lý kiểu duy nhất cho các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh có chung ảnh ngược với các họ siêu phẳng khác nhau ở vị trí tổng quát, trong đó các ảnh ngược với bội giao lớn hơn một hằng số nhất định có thể bỏ qua.

## Kiến nghị

Trong quá trình nghiên cứu các vấn đề của luận án, chúng tôi suy nghĩ về một số hướng nghiên cứu tiếp theo như sau:

- Trong luận án, chúng tôi đã chứng minh định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh giao với họ siêu phẳng mà không xét đến trường hợp siêu mặt vì nếu theo phương pháp đề ra ở Chương hai, số siêu mặt tham gia còn rất lớn. Trong thời gian tới, chúng tôi sẽ nghiên cứu cách làm để đưa ra những định lý duy nhất cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh giao với họ siêu mặt mà số siêu mặt tham gia nhỏ hơn. Ngoài ra, chúng tôi cũng nghiên cứu bài toán duy nhất cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào đa tạp xạ ảnh giao với họ siêu mặt khi bị chặn bởi các trọng khác nhau và ánh xạ phân hình được xét với những điều kiện tổng quát hơn, như ánh xạ phân hình có thể suy biến tuyến tính.
- Chúng tôi tiếp tục nghiên cứu sự phụ thuộc đại số cho họ các ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler vào không gian xạ ảnh hoặc đa tạp xạ ảnh khi họ tham gia là các siêu mặt hoặc khi họ tham gia là siêu phẳng nhưng được xét trong những điều kiện tổng quát hơn về bị chặn và ánh xạ phân hình có thể suy biến tuyến tính.
- Chúng tôi dự định nghiên cứu các bài toán trong lý thuyết phân bố giá trị cho ánh xạ phân hình từ đa tạp Kähler với lớp đa tạp Kähler tổng quát hơn so với đa tạp có phủ song chỉnh hình với một hình cầu trong  $\mathbb{C}^m$  như đã được xem xét trong luận án.

# DANH MỤC CÁC CÔNG TRÌNH ĐÃ CÔNG BỐ LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

- [1] S. D. Quang and T. D. Ngoc (2022), “Non-integrated defect relation and uniqueness theorem for meromorphic mappings on Kähler manifolds”, *Int. J. Math.*, **33(3)**, p. 2250021, doi: 10.1142/S0129167X22500215.
- [2] T. D. Ngoc and S. D. Quang (2025), “Improvement of non-integrated defect relation for meromorphic maps from Kähler manifolds”, *Complex Var. Elliptic Equat.*, **70(4)**, pp. 681–698, doi.org/10.1080/17476933.2024.2337890.
- [3] S. D. Quang, T. D. Ngoc and D. T. T. Hang (2024), “Differentiably nondegenerate meromorphic mappings on Kähler manifolds weakly sharing hyperplanes”, *Thang Long J. Math. Math. Sci.*, **2(2)**, pp. 101–11, <https://science.thanglong.edu.vn/index.php/volc/article/view/160>.
- [4] T. D. Ngoc, K. P. Chi and S. D. Quang (2024), “Meromorphic mappings from a Kähler manifold into a projective space sharing different families of hyperplanes”, *Hokkaido J. Math.*, **53(3)**, 511–530.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] R. Nevanlinna (1926), “Einige Eideutigkeitssätze in der Theorie der meromorphen Funktionen”, *Acta. Math.*, 48, pp 367–391.
- [2] A. Bloch (1926), “Sur les systemes de fonctions uniformes satisfaisant a l’equation d’une variete algebrique dont l’irregularite depasse la dimension”, *J. de Math.*, 5, pp 19–66.
- [3] H. Cartan (1928), “Sur les systeme de fonctions holomorphes a varietes lineaires lacunaires et leurs applications”, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup C*, 45, pp 255–346.
- [4] H. Cartan (1933), “Sur les zeros des combinaisons lineaires de p fonctions holomorphes donnees”, *Mathematica (Cluj)*, 7, pp 5–31.
- [5] H. Weyl and F.J. Weyl (1943), *Meromorphic Functions and Analytic Curves*, Princeton University Press, Princeton.
- [6] L. Ahlfors (1941), “The theory of meromorphic curves”, *Ada Soc. Sci. Fenn. Nova Ser.*, Ser. A, 3(4) , pp 171–183.
- [7] W. Stoll (1953)(1954), “Die beiden Hauptsatze der Wertverteilungstheorie bei Punktionen mehrerer komplexen Veranderlichen”, *Acta Math.*, 90, pp.1–15 and 92, pp 55–169.
- [8] H. Fujimoto (1985), “Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into  $\mathbb{P}^{N_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times \mathbb{P}^{N_k}(\mathbb{C})$ ”, *Japan. J. Math.*, 11(2), pp 233–264.

- [9] Tran Van Tan and Vu Van Truong (2012), “A non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into a projective variety intersecting hypersurfaces”, *Bull. Sci. Math.*, 136, pp 111–126.
- [10] M. Ru and S. Sogome (2012), “Non-integrated defect relation for meromorphic maps of complete Kähler manifolds into  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$  intersecting hypersurfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(3), pp 1145–1162.
- [11] Q. Yan (2013), “Non-integrated defect relation and uniqueness theorem for meromorphic maps of a complete Kähler manifold into  $P^n(\mathbb{C})$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, 398, pp 567–581.
- [12] D. D. Thai and S. D. Quang (2019), “Non-integrated defect relation meromorphic maps of Kähler manifolds into projective varieties”, *S.D. Math. Z.*, 292(1–2), pp 211–229.
- [13] H. Fujimoto (1975), “The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space”, *Nagoya Math. J.*, 58, pp 1–23.
- [14] L. Smiley (1983), “Geometric conditions for unicity of holomorphic curves”, *Contemp. Math.*, 25, pp 149–154.
- [15] Z. Chen and Q. Yan (2009), “Uniqueness theorem of meromorphic mappings into  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$  sharing  $2N + 3$  hyperplanes regardless of multiplicities”, *Internat. J. Math.*, 20, pp 717–726.
- [16] H. Fujimoto (1986), “A unicity theorem for meromorphic maps of a complete Kähler manifold into  $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ ”, *Tohoku Math. J.*, 38(2), pp 327–341.
- [17] H. Fujimoto (1983), “Value distribution of the Gauss maps of complete minimal surfaces in  $\mathbb{R}^m$ ”, *J. Math. Soc. Japan*, 35(4), pp 663–681.
- [18] W. Chen and Q. Han (2018), “A non-integrated hypersurface defect relation for meromorphic maps over complete Kähler manifolds into projective algebraic varieties”, *Kodai Math. J.*, 41(2), pp 284–300.
- [19] S. D. Quang, N. T. Q. Phuong and N. T. Nhung (2017), “Non-integrated defect relation for meromorphic maps from a Kähler manifold intersecting

- hypersurfaces in subgeneral position of  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ”, *J. Math. Anal. Appl.*, 452(2), pp 1434–1452.
- [20] S. D. Quang, L. N. Quynh and N. T. Nhung (2021), “Non-integrated defect relation for meromorphic maps from Kähler manifolds with hypersurfaces of a projective variety in subgeneral position”, *Tohoku Math. J.*, 73(2), pp 199–219.
- [21] P. Corvaja and U. Zannier (2004), “On a general Thue’s equation”, *Amer. J. Math.*, 126, pp 1033–1055.
- [22] S. D. Quang and D. P. An (2017), “Second main theorem and unicity of meromorphic mappings for hypersurfaces in projective varieties”, *Acta Math. Vietnamica*, 42(3), pp 455–470.
- [23] J. Evertse and R. Ferretti (2002), “Diophantine inequalities on projective variety”, *Internat. Math. Res. Notices*, 25, pp 1295–1330.
- [24] J. Evertse and R. Ferretti (2008), “A generalization of the subspace theorem with polynomials of higher degree”, *Developments in Mathematics*, 16, pp 175–198, Springer-Verlag, New York .
- [25] S. D. Quang (2021), “Meromorphic mappings of a complete connected Kähler manifold into a projective space sharing hyperplanes”, *Complex Var. Elliptic Equat.*, 66(9), pp 1486–1516.
- [26] S. D. Quang (2022), “Generalizations of degeneracy second main theorem and Schmidt’s subspace theorem”, *Pacific J. Math.*, 318(1), pp 153–188.
- [27] S. D. Quang (2022), “Meromorphic mappings into projective varieties with arbitrary families of moving hypersurfaces”, *J. Geom. Anal.*, 32(2), pp 1–29.
- [28] D. D. Thai and S. D. Quang (2006), “Uniqueness problem with truncated multiplicities of meromorphic mappings in several complex variables”, *Internat. J. Math.*, 17, pp 1223–1257.
- [29] S. J. Drouilhet (1981), “A unicity theorem for meromorphic mappings between algebraic varieties”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 265, pp 349–358.

- [30] K. Zhou and L. Jin (2022), “Improvement of the uniqueness theorems of meromorphic maps of  $\mathbb{C}^m$  into  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ”, *Comp. Var. Elliptic Equat.*, 67, pp 1244–1261.
- [31] S. D. Quang (2019), “Degeneracy second main theorems for meromorphic mappings into projective varieties with hypersurfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.* 371, no. 4, 2431–2453.
- [32] S. D. Quang, “Meromorphic mappings on Kähler manifolds weakly sharing hyperplanes in  $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ ”, *Preprint*, arXiv:2405.06268 [math.CV].
- [33] G. Dethloff, S. D. Quang and T. V. Tan (2012), “A uniqueness theorem for meromorphic mappings with two families of hyperplanes”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140, pp 189–197.
- [34] J. Noguchi (2005), “A note on entire pseudo-holomorphic curves and the proof of Cartan–Nochka’s theorem”, *Kodai Math. J.*, 28, pp 336–346.
- [35] S.T. Yau (1976), “Some function-theoretic properties of complete Riemannian manifolds and their applications to geometry”, *Indiana U. Math. J.*, 25, pp 659–670.
- [36] L. Karp (1982), “Subharmonic functions on real and complex manifolds”, *Math. Z.*, 179, pp 535–554.
- [37] M. Ru (2009), “Holomorphic curves into algebraic varieties”, *Ann. Math.*, 169, pp 255–267.
- [38] S. D. Quang (2022), “An effective function field version of Schmidt’s subspace theorem for projective varieties, with arbitrary families of homogenous polynomials”, *J. Number Theory*, 241, pp 563–580.
- [39] W. Stoll (1989), “On the propagation of dependences”, *Pac. J. Math.* 139(2), pp 311–337.